

MATEMÀTICA FINANCERA

INTRODUCCIÓ

Llibre d'exercicis totalment desenvolupats, per assolir els conceptes i procediments mitjançant una filosofia d'equilibri de capitals i equivalència d'interessos.

Un capital sense una ubicació en el temps és com una energia potencial sense referència en alçada.

*Xavier Rabasa Arévalo
Professor de Matemàtiques.*

ÍNDEX

<i>Percentatges</i>		4
<i>Successions</i>		
	<i>Progressions Aritmètiques</i>	27
	<i>Progressions geomètriques</i>	33
<i>Matemàtica Financera</i>		
	<i>Teoria</i>	39
	<i>Exercicis</i>	
	<i>Capitalització Simple</i>	46
	<i>Capitalització Composta</i>	60
	<i>Rendes</i>	83

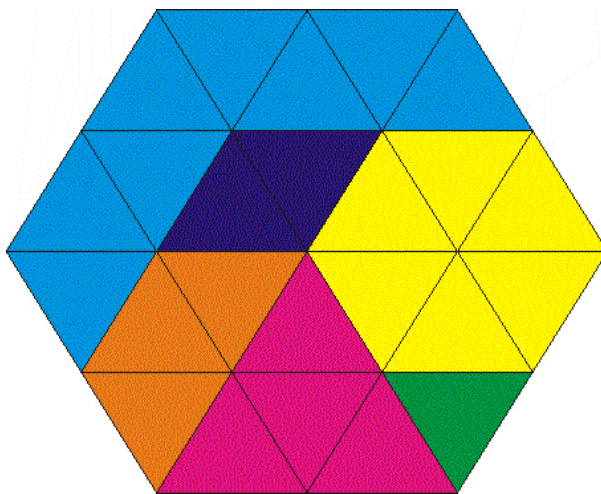
PERCENTATGES



EL PERCENTATGE APLICAT A UNA QUANTITAT





$$1\% \quad \text{[Red Square]} \quad = \frac{1}{100} \quad \text{[Red Square]}$$

$$25\% \quad \text{[Blue Square]} \quad = \frac{25}{100} \quad \text{[Blue Square]} \quad = \quad \text{[2x2 Grid with 1/4 Blue]}$$

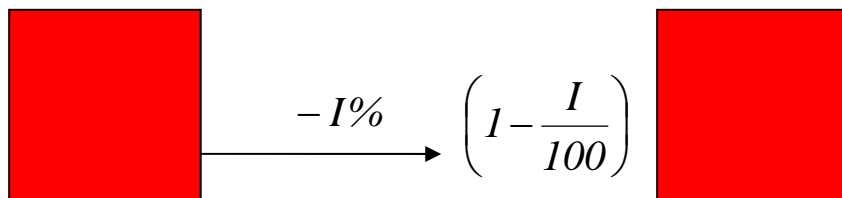
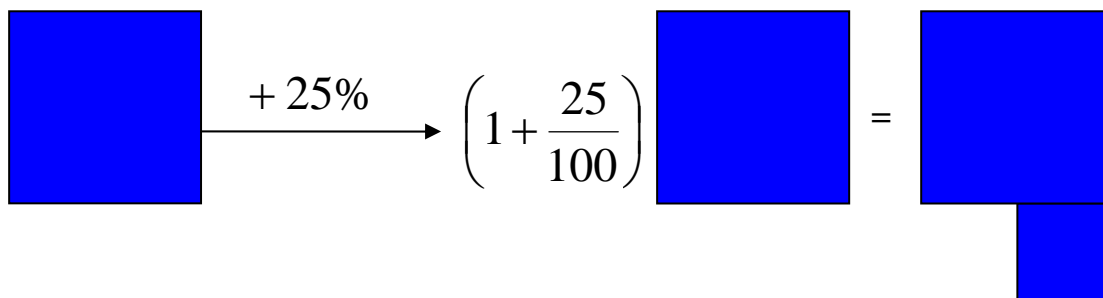
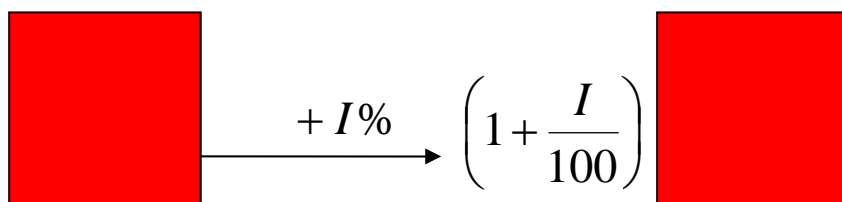
MESURA DE PERCENTATGES

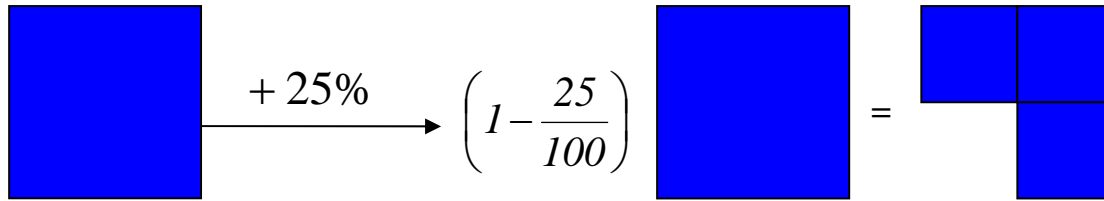


<i>COLOR</i>	<i>PERCENTATGE UNITARI</i>	<i>PERCENTATGE</i>
	$\frac{8}{24}$	$\frac{8}{24} \times 100 = 33'33..%$
	$\frac{2}{24}$	$\frac{2}{24} \times 100 = 8'33..%$

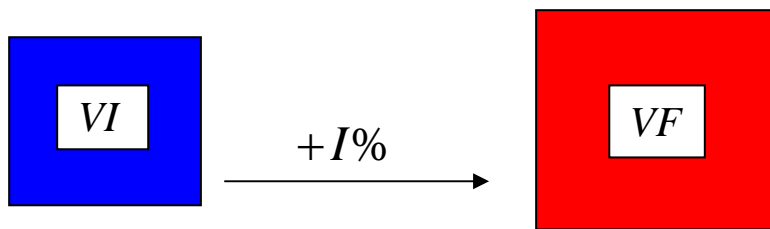
	$\frac{3}{24}$	$\frac{3}{24} \times 100 = 12'5\%$
	$\frac{6}{24}$	$\frac{6}{24} \times 100 = 25\%$
	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24} \times 100 = 16'66..%$
	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24} \times 100 = 4'166..%$
<i>TOTAL</i>	<i>1</i>	<i>100</i>

INCREMENT POSITIU O NEGATIU D'UNA QUANTITAT MESURAT EN PERCENTATGE



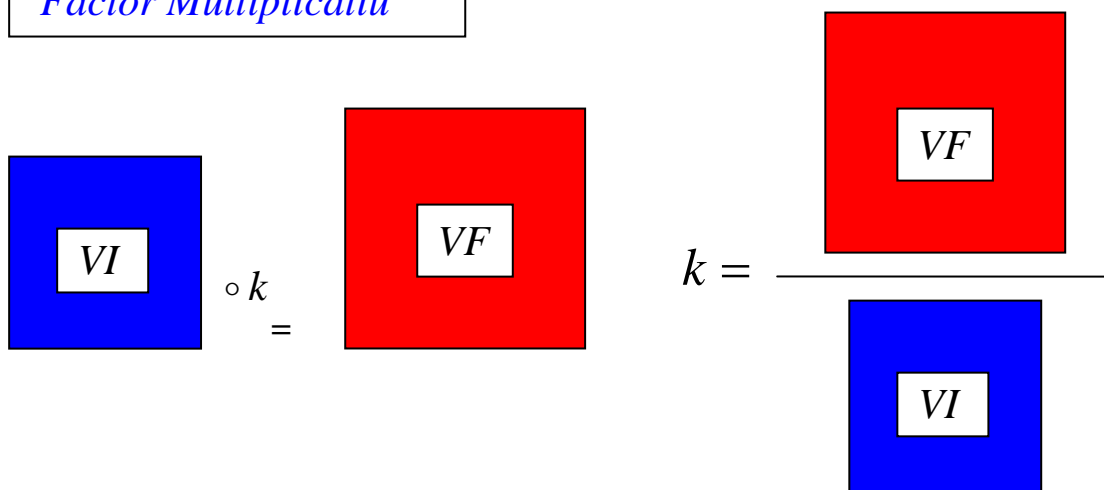


TRANSFORMACIONS I PERCENTATGES



DEFINICIONS I RELACIONS:

Factor Multiplicatiu



Increment: (Δ)

$$\Delta = \text{VF} - \text{VI}$$

Percentatge unitari de l'increment: (i)

$$i = \frac{\text{VF} - \text{VI}}{\text{VI}} = k - 1$$

EXEMPLES

Ex.1

Calculeu el 10% de 235 €

RAONAMENT

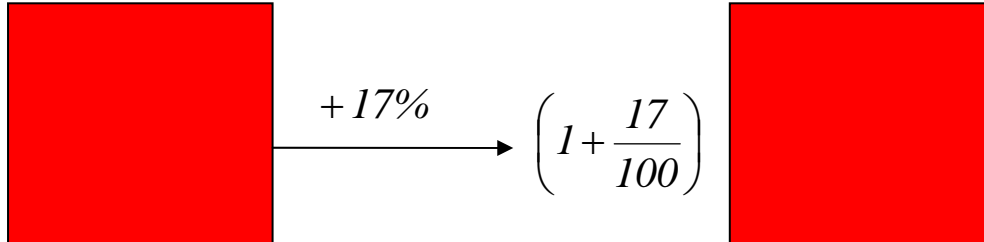
$$I\% \text{ VF} = \frac{I}{100} \text{ VF}$$

$$i = 0'1 \text{ VF} = 235 \cdot 0'1 = 23'5 \text{ €}$$

Ex.2

Una quantitat de 45 € sofreix un increment del 17%. Trobeu la quantitat resultant.

RAONAMENT

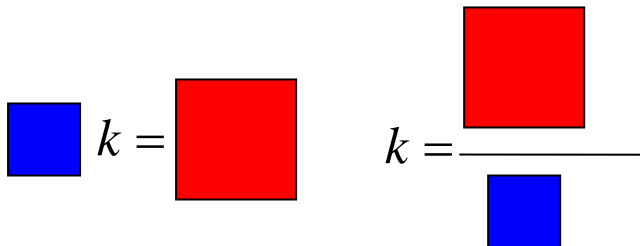


$$i = 0'17 \quad k = 1 + i = 1'17 \quad VF = 1'17 \cdot 45 = \boxed{52'65\text{€}}$$

Ex.3

Una quantitat de 45 € es rebaixa fins a 25 €. Trobeu el percentatge de descompte.

RAONAMENT

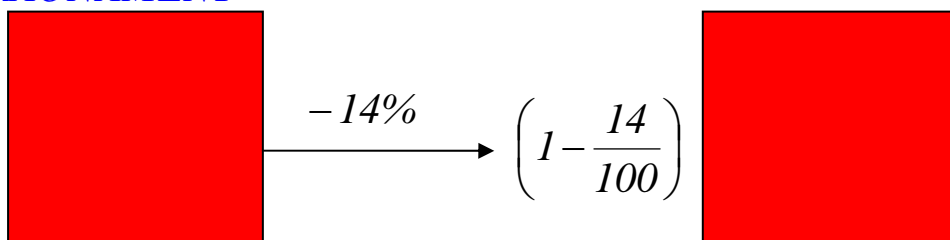


$$k = 25/45 = 0.555.. \quad i = k - 1 = -0'4444... \quad \boxed{I = -44'44.. \%}$$

Ex.4

Un article de A € es rebaixa un 14% fins a valdre 25 €. Trobeu el valor inicial de l'article.

RAONAMENT



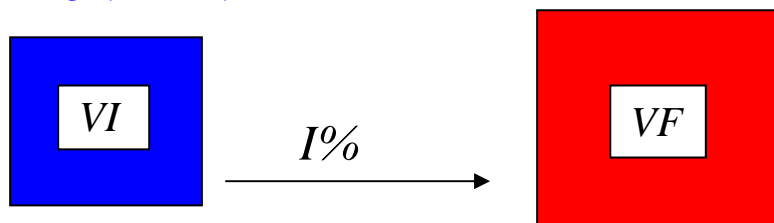
$$i = -0'14 \quad k = 1 + i = 0'86 \quad VI = VF/k = 25/0'86 = \boxed{29'06 \text{ €}}$$

EXERCICIS.

1

Uns pantalons costaven 150 euros abans de les rebaixes i després 120€, **a)** calculeu aquest increment en %. **b)** si les rebaixes fossin del 15% quin seria el seu preu ? **c)** si els 120 euros son sense IVA i l'IVA és del 16%, calculeu el preu final.

RAONAMENT



$$a) \quad \begin{cases} VI = 150 \\ VF = 120 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{VF}{VI} = \frac{120}{150} = 0'8 \Rightarrow i = k - 1 = -0'2 \Rightarrow \boxed{I = -20\%}$$

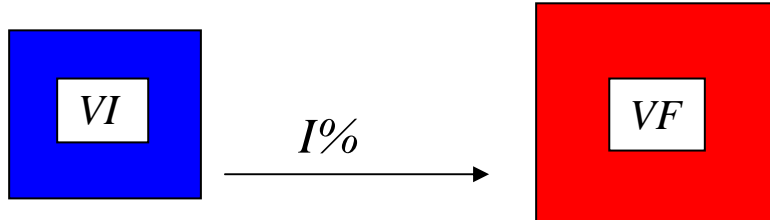
$$b) \quad \begin{cases} VI = 150 \\ I = -15\% \end{cases} \Rightarrow I = -15\% \Rightarrow i = -0'15 \Rightarrow k = 1 + i = 0'85 \Rightarrow \\ VF = k \cdot VI \Rightarrow VF = 0'85 \cdot 150 = 127'5 \Rightarrow \boxed{VF = 127'5 \text{ €}}$$

$$c) \quad \begin{cases} VI = 120 \\ I = 16\% \end{cases} \Rightarrow I = 16\% \Rightarrow i = 0'16 \Rightarrow k = 1 + i = 1'16 \Rightarrow \\ VF = k \cdot VI \Rightarrow VF = 1'16 \cdot 120 = 139'2 \Rightarrow \boxed{VF = 139'2 \text{ €}}$$

2

El preu de dos articles sense IVA és de 25€ i 17'6€ respectivament, calcula el preu final amb un IVA del 16%.

RAONAMENT



a))

$$\begin{cases} VI = 25 \\ I = 16\% \end{cases} \Rightarrow I = 16\% \Rightarrow i = 0'16 \Rightarrow k = 1 + i = 1'16 \Rightarrow$$

$$VF = k \cdot VI \Rightarrow VF = 1'16 \cdot 25 = 29 \Rightarrow \boxed{VF = 29} \text{€}$$

b)

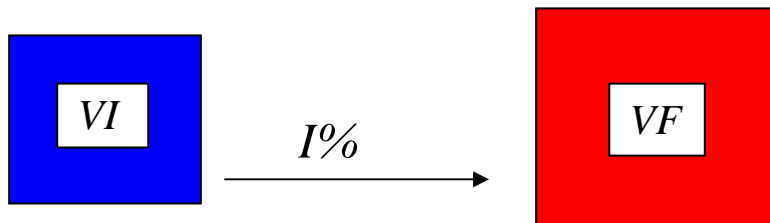
$$\begin{cases} VI = 17'6 \\ I = 16\% \end{cases} \Rightarrow I = 16\% \Rightarrow i = 0'16 \Rightarrow k = 1 + i = 1'16 \Rightarrow$$

$$VF = k \cdot VI \Rightarrow VF = 1'16 \cdot 17'6 = 20'42 \Rightarrow \boxed{VF = 20'42} \text{€}$$

3

Al llarg dels anys el preu d'una mercaderia s'ha multiplicat per 2'23, calculeu el percentatge d'augment.

RAONAMENT



$$k = 2'23 \Rightarrow i = k - 1 = 1'23 \Rightarrow \boxed{I = 123\%}$$

4

Un venedor guanya un 6% sobre el preu de venda, si ven un pis per 80.000 euros, quina quantitat li pertoca?

RAONAMENT

$$I\% \quad \square = \frac{I}{100} \quad \square$$

$$\begin{cases} VI = 80.000 \\ I = 6\% \end{cases} \Rightarrow i = \frac{I}{100} = 0'06 \Rightarrow B = i \cdot VI = 0'06 \cdot 80.000$$

$$\Rightarrow \boxed{B = 4.800\text{€}}$$

5

Un terratinent té 110 hectàrees i decideix plantar: un 20% de pins, un 25% d'avets, un 35% de roures i la resta d'oliveres, amb el descompte d'un 5% reservat als camins. a) quina superfície va plantar de cada classe? b) quin percentatge va plantar d'oliveres?

RAONAMENT

$$I\% \quad \square = \frac{I}{100} \quad \square$$

a)	pins	20%(110) = 22Ha	b) oliveres 15%Ha
	avets	25%(110) = 27'5Ha	
	roures	35%(110) = 38'5Ha	
	camins	5%(110) = 5'5Ha	
	SUMA	85%Ha	

6

En un institut de 1.500 alumnes el 40% són noies i la resta nois, quin és el percentatge de nois? quin és el nombre de noies i nois?

RAONAMENT

$$I\% \quad \square \quad = \frac{I}{100} \quad \square$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{nois} \quad 60\%(1.500) = 0'6 \cdot 1500 = 900 \\ \text{noies} \quad 40\%(1.500) = 0'4 \cdot 1.500 = 600 \end{array} \right.$$

7

El 20% dels alumnes d'una classe van fer malament un examen, si el grup consta de 45 alumnes, quants varen contestar correctament?

RAONAMENT

$$I\% \quad \square \quad = \frac{I}{100} \quad \square$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{malament} \quad 20\%(45) = 9 \text{ alumnes} \\ \text{correctament} \quad 80\%(45) = 36 \text{ alumnes} \end{array} \right.$$

8

D'una bicicleta que valia 50 euros hem van fer un descompte del 8%,
a) quina quantitat hem varen rebaixar? b) quant hem va tocar pagar?

RAONAMENT

VI

$\xrightarrow{I\%}$

VF

$\left\{ \begin{array}{l} VI = 50\text{€} \\ I = -8\% \end{array} \right. \Rightarrow i = -0'08 \Rightarrow k = 1 + i = 0'92 \Rightarrow$

$\left\{ \begin{array}{l} a) \quad D = 0'08 \cdot 50 = 4\text{€} \\ b) \quad VF = 0'92 \cdot 50 = 46\text{€} \end{array} \right.$

9

Un comerciant compra una bicicleta per 40 euros i la ven per 60€. Calculeu els guanys en percentatge.

RAONAMENT

VI

$\xrightarrow{I\%}$



VF

$\left\{ \begin{array}{l} VI = 40 \\ VF = 60 \end{array} \right. \Rightarrow k = \frac{VF}{VI} = \frac{60}{40} = 1'5 \Rightarrow i = k - 1 = 0'5 \Rightarrow \boxed{I = 50\%}$

10

En una classe de 50 alumnes, 30 són noies i 20 són nois, un 10% del total són repetidors i d'aquests el 20% són noies. **a)** calcula el percentatge de nois i noies. **b)** calcula el nombre de nois repetidors. **c)** si 5 de les noies tenen el cabell ros, calculeu el percentatge respecte del grup de noies i respecte a la totalitat de la classe.

RAONAMENT

$I\%$  $= \frac{I}{100}$ 

a) $total = 50 \Rightarrow \begin{cases} nois = \frac{20}{50} \cdot 100 = 40\% \\ noies = \frac{30}{50} \cdot 100 = 60\% \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} nois = 40\% \\ noies = 60\% \end{matrix}}$

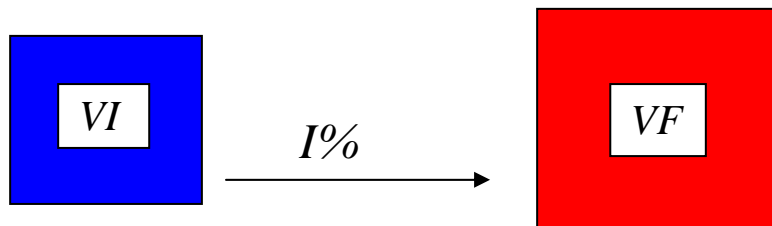
b) $\begin{cases} repetidors = 10\%(50) = 5 \Rightarrow \begin{cases} nois = 80\%(5) = 4 \\ noies = 20\%(5) = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{nois = 4} \end{cases}$

c) $\begin{cases} roses_respeste_al_total_de_noies = \frac{5}{30} \cdot 100 = 16'67\% \\ roses_respeste_al_total_de_clase = \frac{5}{50} \cdot 100 = 10\% \end{cases}$

11

Un llibre que costava 18 euros, augmenta en un 12%. Quin és el seu preu?

RAONAMENT

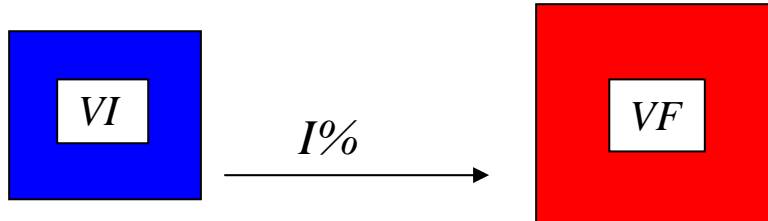


$$\begin{cases} VI = 18\text{€} \\ I = 12\% \end{cases} \Rightarrow i = 0'12 \Rightarrow k = 1 + i = 1'12 \Rightarrow \boxed{VF = 1'12 \cdot 18 = 20'16\text{€}}$$

12

En una comarca el nombre d'aturats era de 24.300, si ha sofert un increment del 19%. Calcula el nombre actual d'aturats.

RAONAMENT



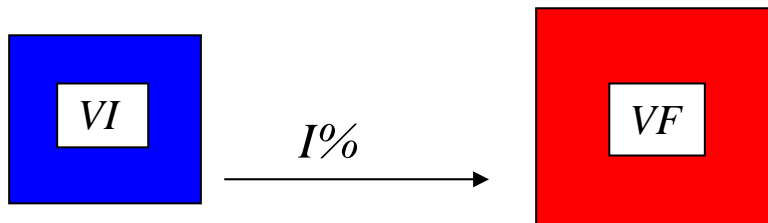
$$\begin{cases} VI = 24.300 \\ I = 19\% \end{cases} \Rightarrow i = 0'19 \Rightarrow k = 1 + i = 1'19 \Rightarrow$$

$$VF = 1'19 \cdot 24.300 = 28.917 \text{ aturats}$$

13

El preu d'una pilota després de sofrir un 5% de descompte és de 9 euros. Calculeu el preu inicial.

RAONAMENT



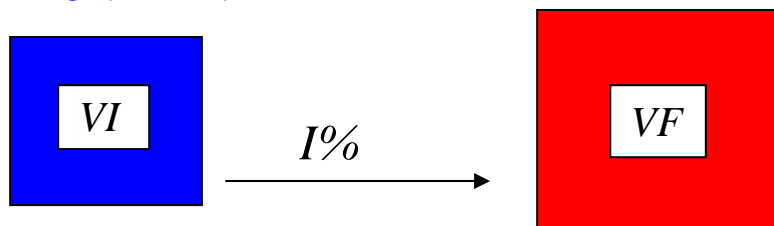
$$\begin{cases} VF = 9\text{€} \\ I = -5\% \end{cases} \Rightarrow i = -0'05 \Rightarrow k = 1 + i = 0'95 \Rightarrow$$

$$VI = \frac{VF}{k} = \frac{9}{0'95} = 9'47\text{€}$$

14

Per una factura de 800 € em cobren 640 €. Calculeu el percentatge de descompte.

RAONAMENT



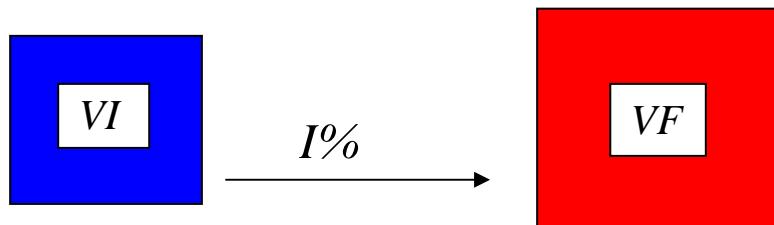
$$\begin{cases} VI = 800€ \\ VF = 640€ \end{cases} \Rightarrow k = \frac{VF}{VI} = \frac{640}{800} = 0'80 \Rightarrow i = k - 1 = -0'20 \Rightarrow$$

$$I = -20\%$$

15

El sou net d'una persona després de una retenció del 12% queda en 836 euros, calculeu el seu sou brut.

RAONAMENT



$$\begin{cases} VF = 836€ \\ I = -12\% \end{cases} \Rightarrow i = -0'12 \Rightarrow k = 1 + i = 0'88 \Rightarrow$$

$$VI = \frac{VF}{k} = \frac{836}{0'88} = 950€$$

16

Si la venda d'un article deixa uns guanys del 10% i un venedor rep un 6% de comissió sobre els beneficis, quina comissió tindrà sobre una

venta de 5 milions d'€ ?

RAONAMENT

$$I\% \quad \square \quad = \frac{I}{100} \quad \square$$

$$\text{Gunnys} = 10\%(5.000.000) = 500.000\text{€}$$

$$\text{Comissió} = 6\%(500.000) = \frac{6}{100} \cdot 500.000 = 30.000\text{€} \quad \boxed{C = 30.000\text{€}}$$

17

En un centre de 800 alumnes i a la primera avaluació aproven totes les assignatures 400 i en les recuperacions 200 més. Calcula el percentatge d'aprovat a la primera avaluació, a la recuperació i al final de les dues proves.

RAONAMENT

$$I\% \quad \square \quad = \frac{I}{100} \quad \square$$

percentatge d'aprovat a la primera avaluació respecte a 800 alumnes

$$x\%(800) = \frac{800x}{100} = 8x \Rightarrow 8x = 400 \Rightarrow \boxed{x = 50\%}$$

percentatge d'aprovat en les recuperacions respecte a 400 alumnes

$$y\%(400) = \frac{400y}{100} = 4y \Rightarrow 4y = 200 \Rightarrow \boxed{y = 50\%}$$

percentatge total d'aprovat (respecte de 800 alumnes)

$$z\%(800) = \frac{800z}{100} = 8z \Rightarrow 8z = 600 \Rightarrow \boxed{z = 75\%}$$

18

Després de gastar el 15% del dipòsit d'un cotxe resten 42'5 l, calculeu la capacitat del dipòsit.

RAONAMENT

$$I\% \quad \square \quad = \frac{I}{100} \quad \square$$

$$15\%(D) = 42'5 \Rightarrow \frac{15D}{100} = 42'5 \Rightarrow D = \frac{4.250}{15} \Rightarrow \boxed{D = 50} \text{ l.}$$

19

El 0'8% de la població masculina d'una ciutat de 400.000 habitants pateix d'asma, quin és el nombre de homes malalts si el 60% de la població son dones?

RAONAMENT

$$I\% \quad \square \quad = \frac{I}{100} \quad \square$$

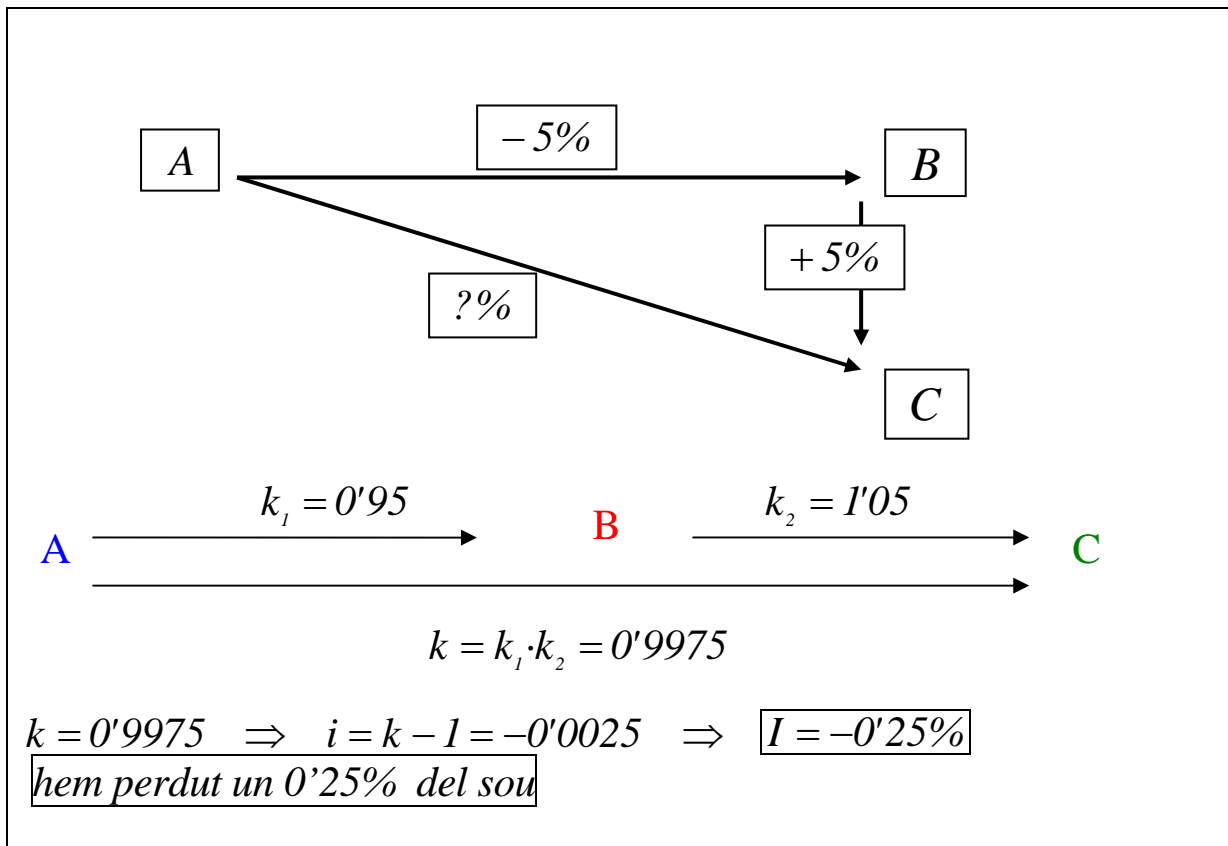
$$\begin{cases} \text{homes} & 40\%(400.000) = 160.000 \\ \text{dones} & 60\%(400.000) = 240.000 \end{cases} \Rightarrow HM = 0'8\%(160.000)$$

$$\Rightarrow \boxed{H.M. = 1.280} \text{ homes malalts}$$

20

L'any passat vaig tenir una davallada de sou del 5%. Si aquest any m'augmenten el 5%, hem quedaré igual que fa dos anys?

RAONAMENT



21

En unes votacions el percentatge d'abstencions en una empresa fou del 25%, si el total de paperetes era de 240, de quants treballadors consta l'empresa?

RAONAMENT

$I\%$
 $= \frac{I}{100}$

$75\%(T) = 240 \Rightarrow \frac{75T}{100} = 240 \Rightarrow T = \frac{24.000}{75} \Rightarrow T = 320$

22

El cost de la vida ha pujat un 3%, un 2'5% i un 2'8% amb tres anys consecutius, quin és el percentatge total als tres anys?

RAONAMENT



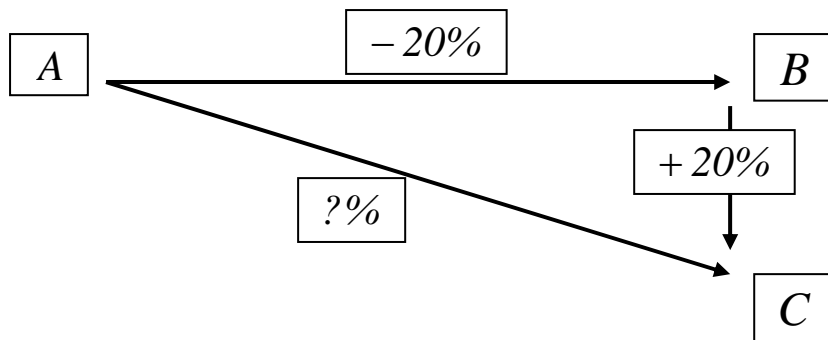
$$\begin{cases} i_1 = 0'03 & k_1 = 1'03 \\ i_2 = 0'025 & k_2 = 1'025 \\ i_3 = 0'028 & k_3 = 1'028 \end{cases} \Rightarrow k = 1'03 \cdot 1'025 \cdot 1'028 = 1'0853$$

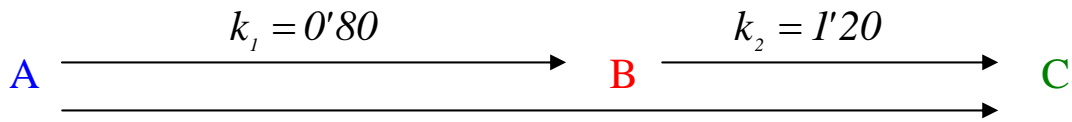
$$\Rightarrow i = k - 1 = 0'0853 \Rightarrow \boxed{I = 8'53\%}$$

23

Si em rebaixen un 20% i després em pugen un 20% de la quantitat rebaixada, calculeu el percentatge d'augment o disminució.

RAONAMENT





$$k = 0.80 \cdot 1.20 = 0.96$$

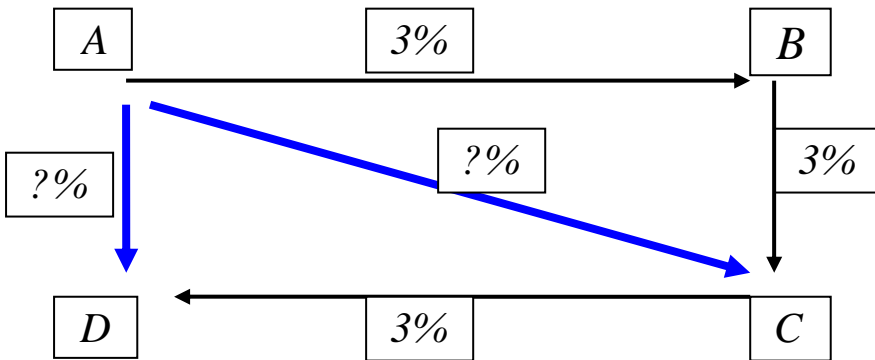
Increment unitari $i = k - 1 = 0.96 - 1 = -0.04 \Rightarrow I = -4\%$

hem tingut una rebaixa del 4 % respecte al preu inicial

24

Si cada any la vida puja un 3%, a) ¿quant puja en 2 anys? b) ¿i en tres anys?

RAONAMENT



$$\begin{cases} i_1 = 0.03 & k_1 = 1.03 \\ i_2 = 0.03 & k_2 = 1.03 \\ i_3 = 0.03 & k_3 = 1.03 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a) k = k_1 \cdot k_2 = 1.0609 \\ b) k = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 1.0927 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 0.0609 \\ i = 0.0927 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a) I = 6.09\% \\ b) I = 9.27\% \end{cases}$$

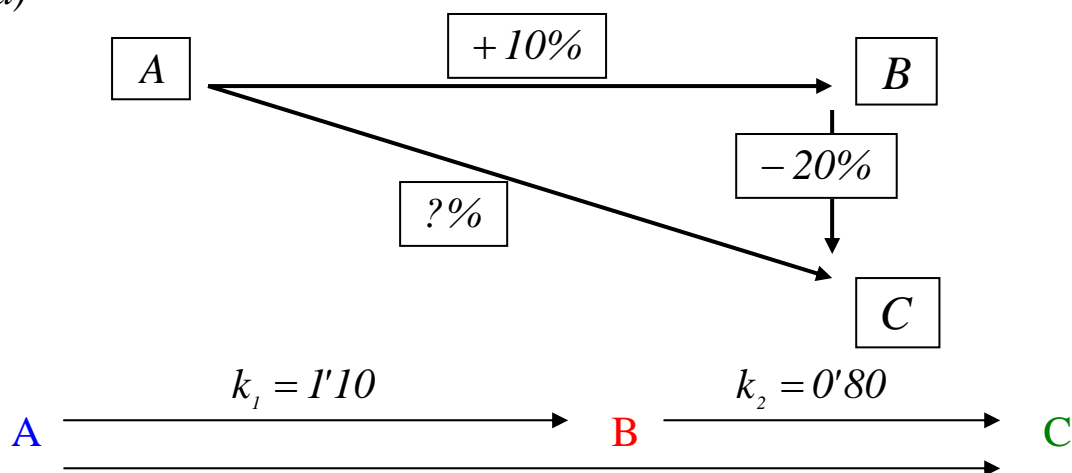
25

Esbrina el % aplicat al preu inicial, a) després de pujar un 10% i

després rebaixar el 20%, b) el mateix a l'inrevés.

RAONAMENT

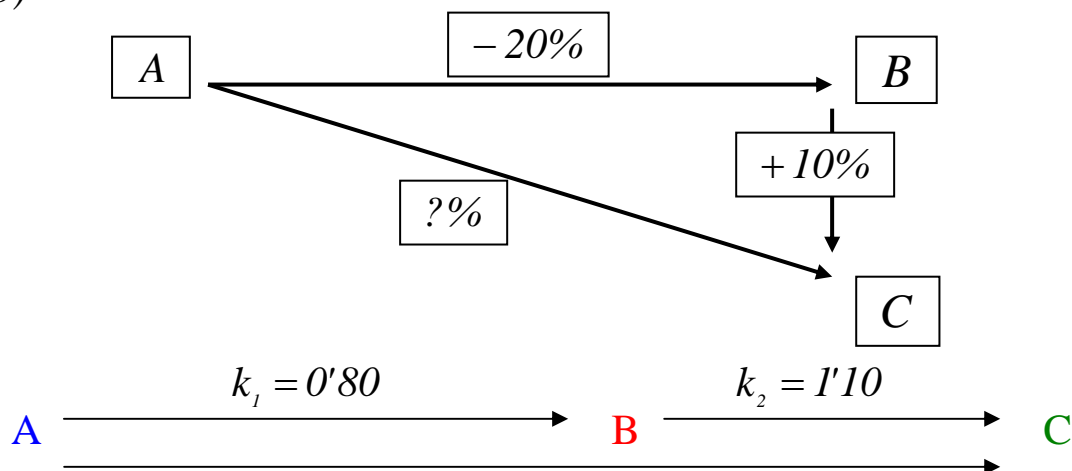
a)



$$k = 1.10 \cdot 0.80 = 0.88$$

$$k = 0.88 \Rightarrow i = k - 1 = -0.12 \Rightarrow \boxed{I = -12\%}$$

b)



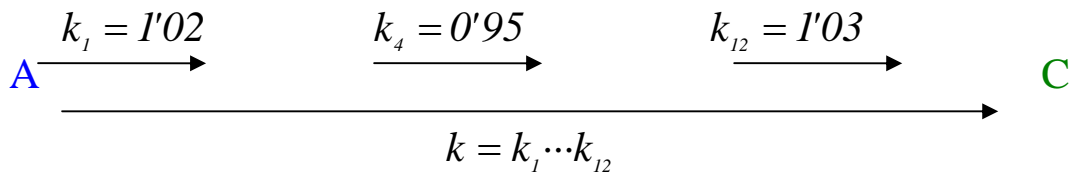
$$k = 0.80 \cdot 1.10 = 0.88$$

$$k = 0.88 \Rightarrow i = k - 1 = -0.12 \Rightarrow \boxed{I = -12\%}$$

ha sofert un increment negatiu del 12%. Les dues situacions són equivalents.

Les accions d'una empresa augmentaren un 2% al mes, durant els tres primers mesos de l'any, després baixaren un 5% mensual durant els sis mesos següents i els últims mesos augmentaren un 3% cada mes. Calculeu el percentatge total d'augment o disminució al final de l'any.

RAONAMENT

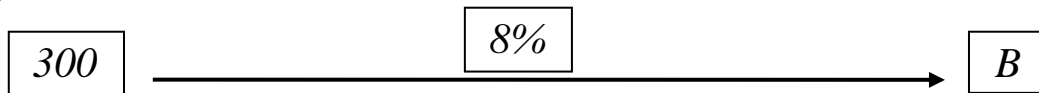


$$k = 1'02^3 \cdot 0'95^6 \cdot 1'03^3 = 0'8524 \Rightarrow i = k - 1 = -0'1475 \Rightarrow I = -14'75\%$$

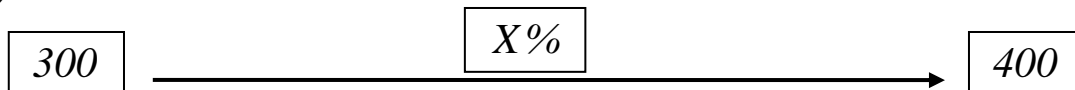
27

Donades les següents transformacions, calculeu el valor de cada lletra o incògnita.

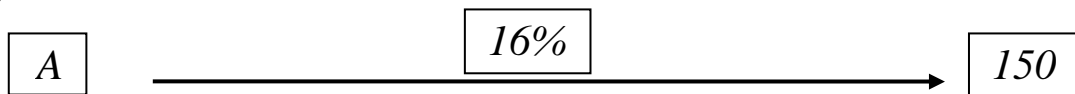
a)



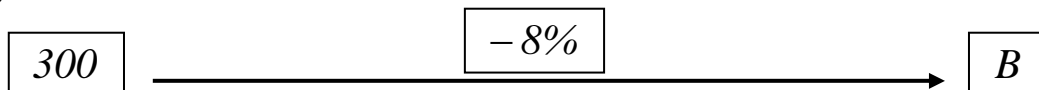
b)



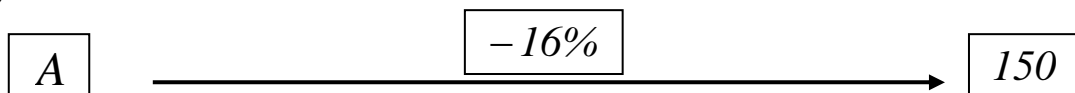
c)



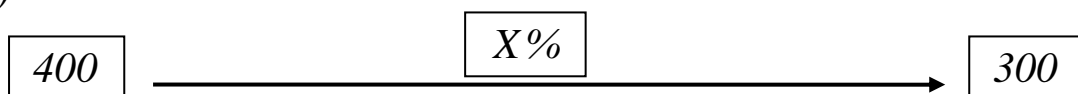
d)



e)



f)



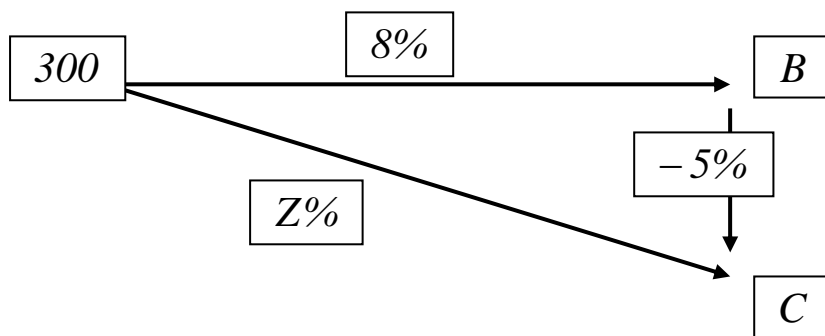
Sol.

a) $B=324$ b) $X=33'33.$ c) $A=129'31$ d) $B=276$ e) $A=178'57$ f) $X=-25$

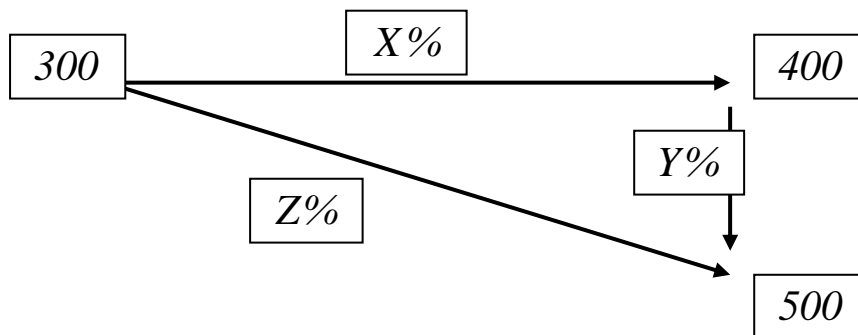
28

Donades les següents transformacions, calculeu el valor de cada lletra o incògnita.

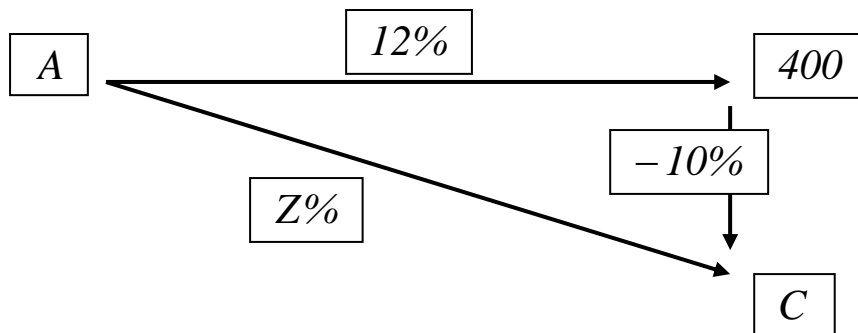
a)



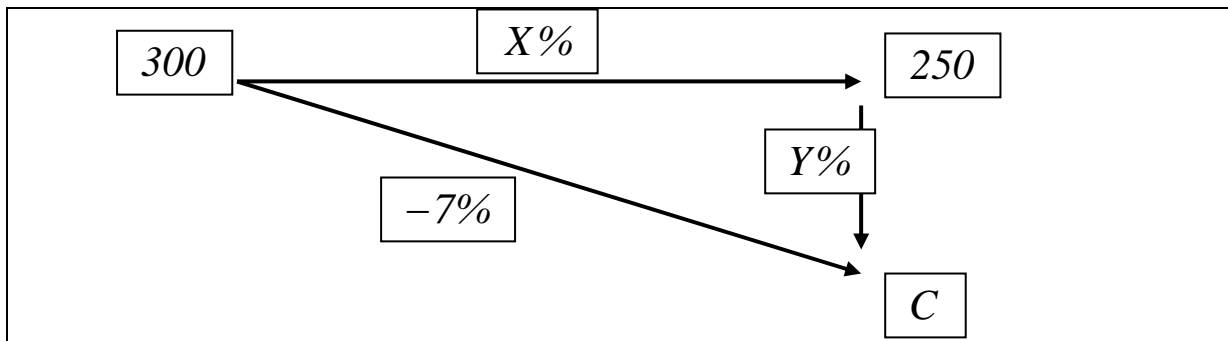
b)



c)



d)



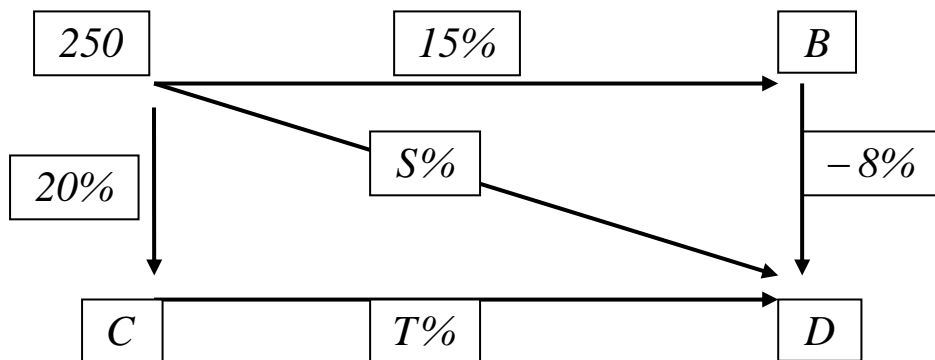
Sol.

- | | | | |
|-----------|-------------|--------------|---------------|
| a) | b) | c) | d) |
| $B=324$ | $X=33'33..$ | $A=357'1428$ | $X=-16'66...$ |
| $C=307'8$ | $Y=25$ | $C=360$ | $Y=11'6$ |
| $Z=2'6$ | $Z=66'66..$ | $Z=0'8$ | $C=279$ |

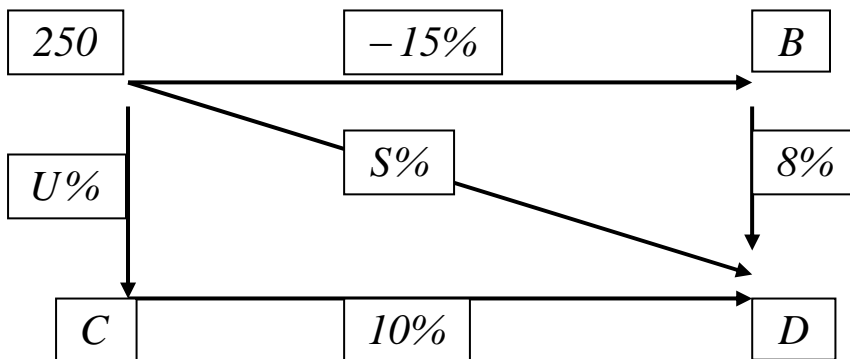
29

Donades les següents transformacions, calculeu el valor de cada lletra o incògnita.

a)



b)

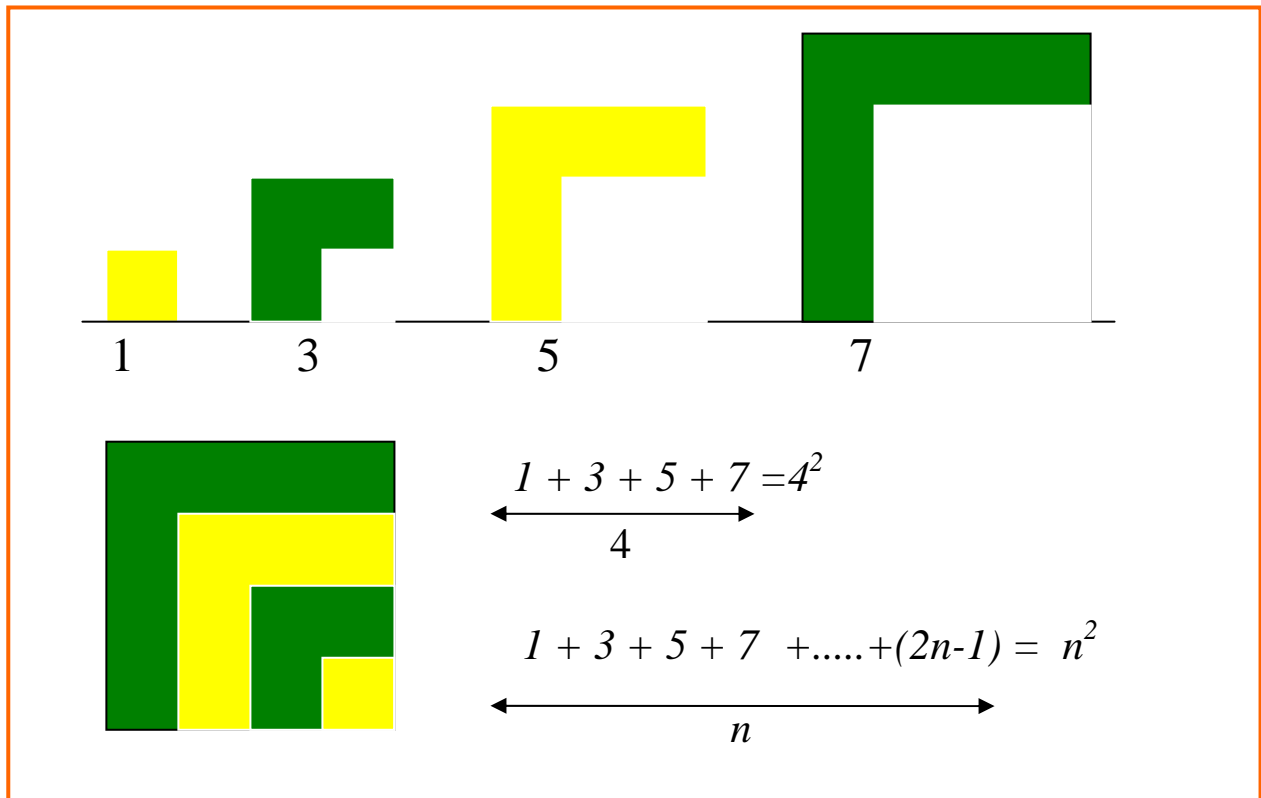


Sol.

$a)$	$B=287'5$	$C=300$	$D=264'5$	$S=5'8$	$T=-11'833.$
$b)$	$B=212'5$	$C=255$	$D=229'5$	$S=-8'2$	$U=2$

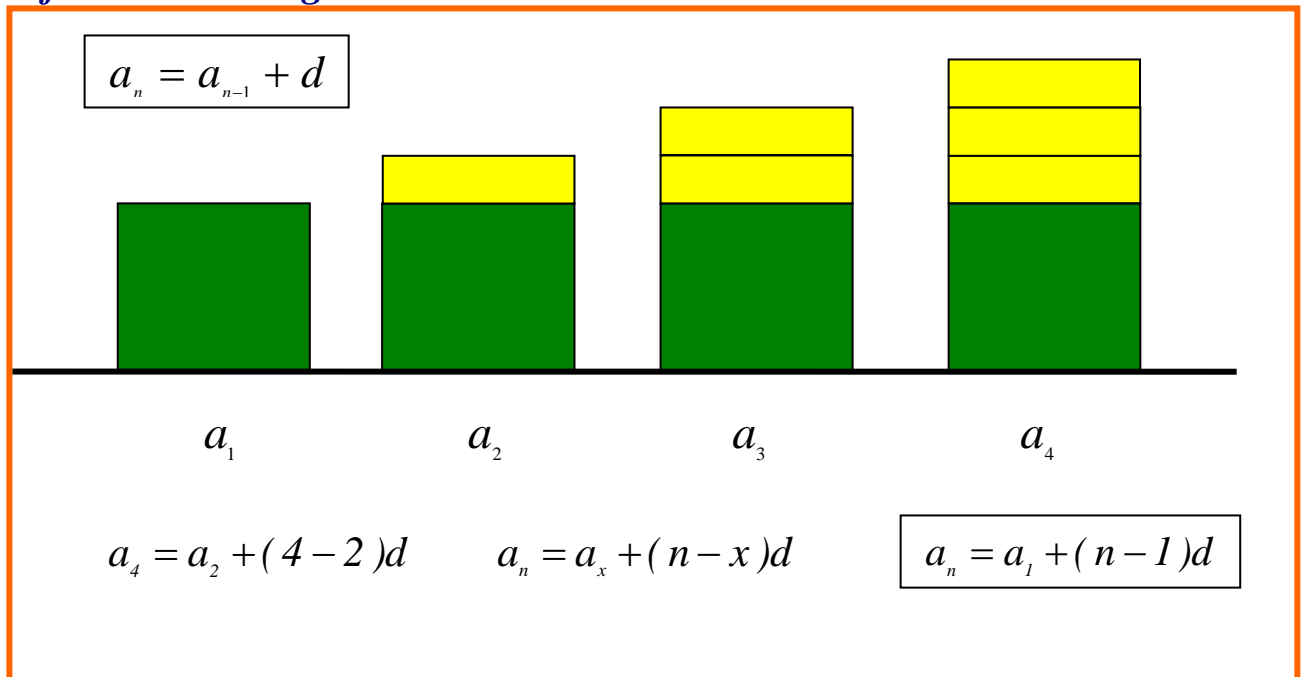
SUCCESSIONS NUMÈRIQUES

successió de nombres senars

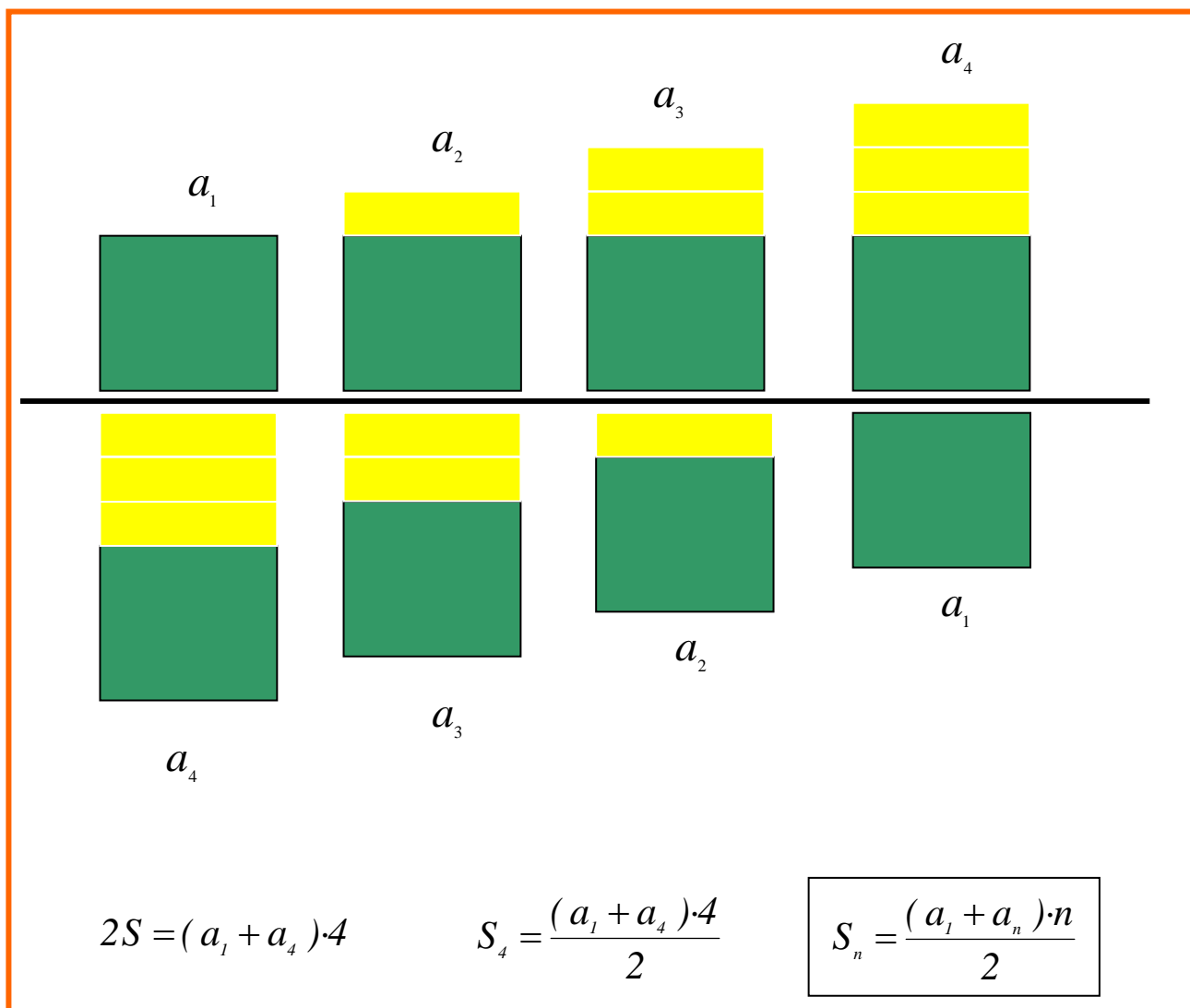


PROGRESSIONS ARITMÈTIQUES

definició i terme general



suma dels n primers termes



Exemples:

1	3	5	7	9	2	4	6	8	10
1	2	3	4	5	-3	-6	-9	-12	-15

PROPIETATS:

RELACIÓ ENTRE DOS TERMES I LA CONSTANT

$$d = \frac{a_x - a_y}{x - y}$$

Ex. 1

En una progressió aritmètica el tercer terme és $a_3 = 30$ i el setè terme és $a_7 = 50$, calculeu la constant o diferència de la progressió

RAONAMENT

$$d = \frac{a_x - a_y}{x - y} = \frac{50 - 30}{7 - 3} = 5 \quad \boxed{d = 5}$$

TERME GENERAL:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1)d}$$

$$\boxed{a_n = a_k + (n - k)d}$$

$$\boxed{n = 1 + \frac{a_n - a_1}{d}}$$

Ex.2

Donada la successió 4,7,10,.....,3334 determineu el nombre de termes i el terme general.

RAONAMENT

$$n = 1 + \frac{a_n - a_1}{d} = 1 + \frac{3334 - 4}{3} = 1111 \text{ termes en total}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = 4 + (n - 1)3 = 3n + 1 \quad \boxed{a_n = 3n + 1}$$

SUMA DELS n PRIMERS TERMES

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}}$$

Ex.3

Calculeu el valor de la suma, $S = 4 + 7 + 10 + \dots + 3334$

RAONAMENT

$$n = 1 + \frac{a_n - a_1}{d} = 1 + \frac{3334 - 4}{3} = 1111 \text{ termes}$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(4 + 3334)1111}{2} = 1854259 \quad \boxed{S_n = 1.854.259}$$

INTERPOLACIÓ DE N TERMES EN PROGRESSIÓ ARITMÈTICA ENTRE DOS TERMES A I B

$$d = \frac{a_{n+2} - a_1}{n+1} = \frac{B - A}{n+1}$$

Ex.4

Interpoleu 1109 termes en progressió aritmètica entre el 4 i el 3334.

RAONAMENT

$$d = \frac{a_{n+2} - a_1}{n+1} = \frac{B - A}{n+1} = \frac{3334 - 4}{1110} = 3 \quad \boxed{d = 3} \quad \boxed{4, 7, 10, \dots, 3.334}$$

TRES TERMES EN PROGRESSIÓ ARITMÈTICA:

Tres termes a b c estan en progressió aritmètica si el segon és

mitjana aritmètica dels altres dos.

$$\boxed{b = \frac{a + c}{2}}$$

Ex.5

Calculeu el valor d'x si: $x, 2x - 3, x + 12$ són tres termes consecutius d'una progressió aritmètica,

RAONAMENT

$$2x - 3 = \frac{x + x + 12}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x - 3 = x + 6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 9}$$

DETERMINACIÓ DELS ELEMENTS PRINCIPALS D'UNA PROGRESSIÓ ARITMÈTICA

PRIMER CAS: Es coneixen dos termes a_x i a_y

Ex.6

En una progressió aritmètica el tercer terme és 30 i el setè terme és 50 calculeu el terme general i la suma dels n primers termes.

RAONAMENT

$$d = \frac{a_x - a_y}{x - y} = \frac{50 - 30}{7 - 3} = 5 \quad \boxed{d = 5}$$

$$a_n = a_3 + (n - 3)d = 30 + (n - 3) \cdot 5 = 5n + 15 \Rightarrow \begin{cases} a_n = 5n + 15 \\ a_1 = 5 + 15 = 20 \end{cases}$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(20 + 5n + 15)n}{2} = \frac{n(5n + 35)}{2} \quad \boxed{S_n = \frac{5n^2 + 35n}{2}}$$

SEGON CAS: Es coneix un terme a_x i la constant d **Ex.7**

En una progressió aritmètica el tercer terme és $a_3 = 30$ i la diferència $d = -4$, calculeu el terme general i la suma dels n primers termes.

RAONAMENT

$$a_n = a_3 + (n - 3)d = 30 + (n - 3) \cdot (-4) = -4n + 42 \Rightarrow \begin{cases} a_n = -4n + 42 \\ a_1 = 38 \end{cases}$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(38 - 4n + 42)n}{2} = \frac{-4n^2 + 80n}{2} \quad \boxed{S_n = -2n^2 + 40n}$$

TERCER CAS: Es coneix el terme general $a_n = A n + B$ **Ex.8**

En una progressió aritmètica el terme general és $a_n = 30n - 9$, calculeu la diferència i la suma dels n primers termes.

RAONAMENT

$$a_n = 30n - 9 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 21 \\ a_2 = 51 \end{cases} \Rightarrow d = a_2 - a_1 \quad \boxed{d = 30}$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(21 + 30n - 9)n}{2} = \frac{30n^2 + 12n}{2} \quad \boxed{S_n = 15n^2 + 6n}$$

QUART CAS: Es coneix la suma dels n primers $S_n = \frac{An^2 + Bn}{2}$

Ex.9

En una progressió aritmètica la suma dels n primers termes és $S_n = 30n^2 - 9n$ calculeu la diferència i el terme general.

$$S_n = 30n^2 - 9n \Rightarrow \begin{cases} S_1 = 21 \\ S_2 = 102 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = S_1 = 21 \\ a_2 = S_2 - S_1 = 81 \end{cases} \Rightarrow$$

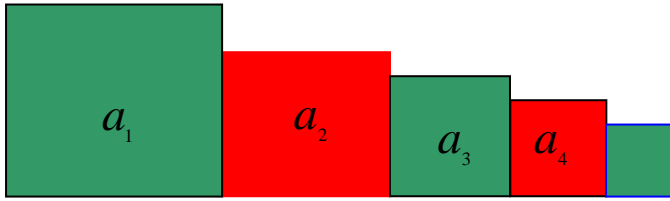
$$\boxed{d = 81 - 21 = 60}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 21 + (n-1) \cdot 60 \quad \boxed{a_n = 60n - 39}$$

PROGRESSIONS GEOMÈTRIQUES

Definició i Terme General

$$a_n = a_{n-1} \cdot r$$



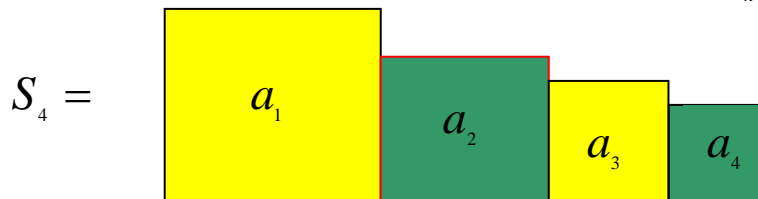
$$a_n = a_{n-1} \cdot r$$

$$a_5 = a_2 r^{5-2}$$

$$a_n = a_x r^{n-x}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Suma dels n primers termes i Suma Total si $a_n \rightarrow 0$



$$S_4 - rS_4 = a_1 - a_5 \quad S_4 = \frac{a_1 - a_4 r}{1 - r}$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$$

si

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$$

RELACIÓ ENTRE DOS TERMES I LA CONSTANT

$$a_x = a_y \cdot r^{x-y}$$

$$r = \sqrt[x-y]{\frac{a_x}{a_y}}$$

Ex.1

En una progressió geomètrica el tercer terme és $a_3 = 32$ i el cinquè $a_5 = 8$ trobeu la raó de la progressió

RAONAMENT

$$r = \sqrt[x-y]{\frac{a_x}{a_y}} = \sqrt[5-3]{\frac{8}{32}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

TERME GENERAL:

$$a_x = a_y \cdot r^{x-y}$$

Ex.2

En una progressió geomètrica el tercer terme és $a_3 = 32$ i la raó

$r = \frac{1}{4}$, trobeu el terme general.

RAONAMENT

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k} = 32 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-3} = 2^5 \cdot 2^{6-2n} = 2^{11-2n}$$

$$a_n = 2^{11-2n}$$

SUMA DELS n PRIMERS TERMES

$$S_n = \frac{ra_n - a_1}{r - 1}$$

Ex.3

En una progressió geomètrica el tercer terme és $a_3 = 32$ i la raó

$r = 2$, trobeu la suma dels n primers termes.

RAONAMENT

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k} = 32 \cdot 2^{n-3} = 4 \cdot 2^n = 2^{n+2}$$

$$a_n = 2^{n+2}$$

$$S_n = \frac{ra_n - a_1}{r-1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2^n - 8}{2-1} = 8 \cdot 2^n - 8$$

$$S_n = 8(2^n - 1)$$

SUMA DE TOTS ELS TERMES

En el cas particular que $-1 < r < 1$ aleshores el terme general $a_n \rightarrow 0$ i

la suma total es fa finita essent el seu valor:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

Ex.4

En una progressió geomètrica el tercer terme és $a_3 = 32$ i la raó

$r = \frac{1}{2}$, trobeu la suma total de la successió.

RAONAMENT

$$a_1 = 32 \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 128$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{128}{1-0'5} = 256$$

INTERPOLACIÓ DE n TERMES EN PROGRESSIÓ GEOMÈTRICA ENTRE DOS TERMES A I B

$$a_{n+2} = a_1 \cdot r^{n+1}$$

$$r = \sqrt[n+1]{\frac{a_{n+2}}{a_1}}$$

$$r = \sqrt[n+1]{\frac{B}{A}}$$

Ex.5

Interpoleu 3 termes en progressió geomètrica entre el 1024 i el 5184

RAONAMENT

$$r = \sqrt[n+1]{\frac{B}{A}} = \sqrt[4]{\frac{5184}{1024}} = \frac{3}{2}$$

$$1024, 1536, 2304, 3456, 5184$$

TRES TERMES EN PROGRESSIÓ GEOMÈTRICA

Tres termes a b c estan en progressió geomètrica si el segon és mitjana geomètrica dels altres dos. $b = \sqrt{a \cdot c}$

Ex.6

Els valors $2x - 3, 21, 12x + 3$ són tres termes consecutius d'una progressió geomètrica, determineu el valor d' x .

RAONAMENT

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow (2x - 3)(12x + 3) = 21^2 \Rightarrow 24x^2 - 30x - 450 = 0 \Rightarrow$$

$$4x^2 - 5x - 75 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{1225}}{8} = \frac{5 \pm 35}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -\frac{15}{4} \end{cases}$$

PRODUCTE DELS N PRIMERS TERMES

$$P = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \quad P = a_1^n \cdot r^{1+2+\dots+(n-1)} = a_1^n \cdot r^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad r = \sqrt[n]{\frac{P}{a_1^n}}$$

DETERMINACIÓ DELS ELEMENTS PRINCIPALS D'UNA PROGRESSIÓ GEOMÈTRICA

PRIMER CAS: Es coneixen dos termes a_x i a_y

Ex.7

Determineu el terme general i la suma dels n primers termes d'una progressió geomètrica en que el tercer terme és $a_3 = 88$ i el sisè $a_6 = 64$.

RAONAMENT

$$r = \sqrt[x-y]{\frac{a_x}{a_y}} = \sqrt[6-3]{\frac{64}{8}} = 2 \quad \boxed{r=2} \quad a_n = a_3 \cdot r^{n-3} = 8 \cdot 2^{n-3} \quad \boxed{a_n = 2^n}$$

$$S_n = \frac{ra_n - a_1}{r-1} = \frac{2 \cdot 2^n - 2}{2-1} = 2 \cdot 2^n - 2 \quad \boxed{S_n = 2^{n+1} - 2}$$

SEGON CAS: Es coneix un terme a_x i la constant r

Ex.8

Determineu el terme general i la suma dels n primers termes d'una progressió geomètrica on el cinquè terme és $a_5 = 128$ i la raó $r = \frac{1}{2}$.

RAONAMENT

$$a_n = a_5 \cdot r^{n-5} = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-5} = 2^7 \cdot 2^{5-n} = 2^{12-n} \quad \boxed{a_n = 2^{12-n}} \Rightarrow a_1 = 2^{11}$$

$$S_n = \frac{ra_n - a_1}{r-1} = \frac{2^{11-n} - 2^{11}}{-\frac{1}{2}} = 2^{12} - 2^{12-n} \quad \boxed{S_n = 2^{12} - 2^{12-n}}$$

TERCER CAS: Es coneix el terme general $a_n = A r^n$

Ex.9

Determineu la raó i la suma dels n primers termes d'una progressió geomètrica on el terme general és $a_n = 3 \cdot 5^n$.

RAONAMENT

$$\begin{cases} a_1 = 15 \\ a_2 = 75 \end{cases} \Rightarrow r = \frac{75}{15} \Rightarrow \boxed{r=5}$$

$$S_n = \frac{ra_n - a_1}{r-1} = \frac{3 \cdot 5^{n+1} - 15}{4} \quad \boxed{S_n = \frac{3(5^{n+1} - 5)}{4}}$$

QUART CAS: Es coneix la suma dels n primers S_n

Determineu la raó i el terme general d'una progressió geomètrica on la suma dels n primers és $S_n = 5 \cdot 4^n - 5$.

RAONAMENT

$$\begin{cases} a_1 = S_1 = 15 \\ a_2 = S_2 - S_1 = 75 - 15 = 60 \end{cases} \Rightarrow r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{60}{15} \Rightarrow \boxed{r = 4}$$
$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 15 \cdot 4^{n-1} \Rightarrow \boxed{a_n = 15 \cdot 4^{n-1}}$$

MATEMÀTICA COMERCIAL I FINANCERA

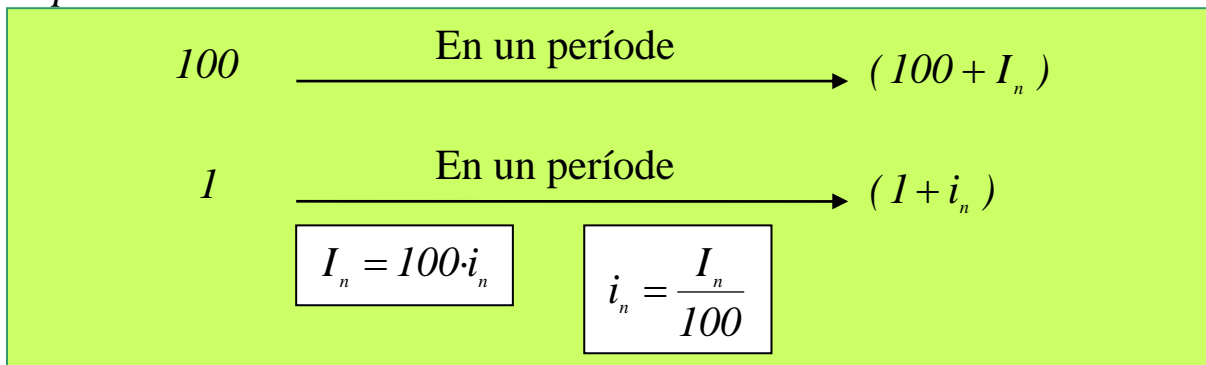
TAXA D'INTERÈS DEL PERÍODE

percentual I_n

Benefici o interès produït per un capital de 100 unitats monetàries al llarg d'1 període.

unitària i_n

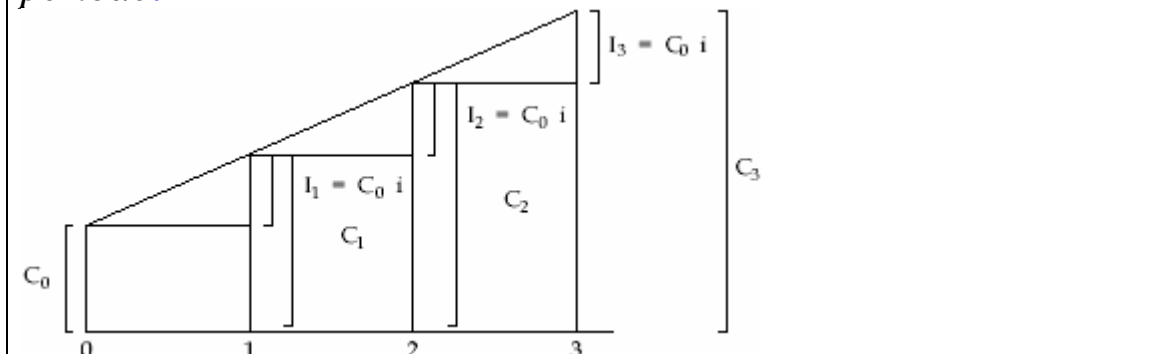
Benefici produït per un capital d'1 unitat monetària al llarg d'1 període.

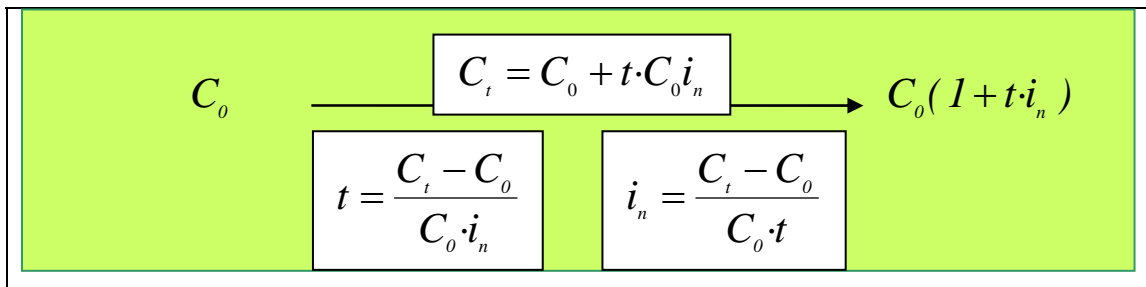


VALOR D'UN CAPITAL AL FINAL DE (t) PERÍODES SOTMÉS A UNA TAXA PERIÒDICA UNITARIA (i_n)

CAPITALITZACIÓ SIMPLE:

El capital productor d'interessos en cada període no varia aleshores l'interès en cada període es el mateix que el del primer període.





LLETRES DE CANVI

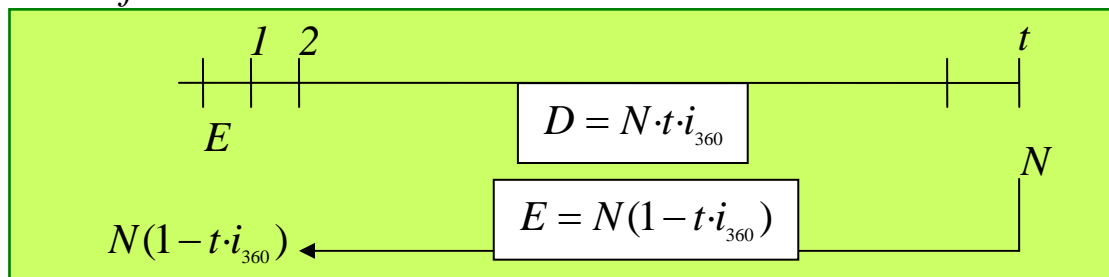
Descompte Comercial

Capitalització a règim simple amb freqüència diària $n=360$ dies.

t = temps anterior al venciment mesurat en dies **1 any = 360 dies**

N = Nominal i_{360} = interès unitari diari D = Descompte

E = Efectiu



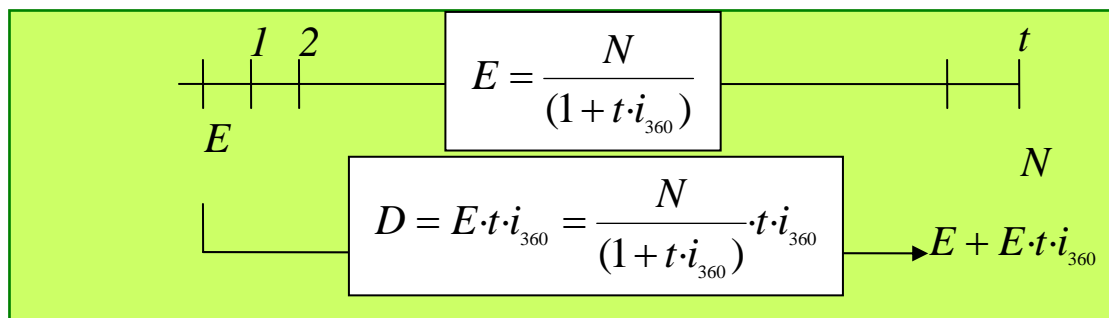
Descompte Racional

Capitalització a règim simple amb freqüència diària $n=360$ dies.

t = temps anterior al venciment mesurat en dies **1 any = 360 dies**

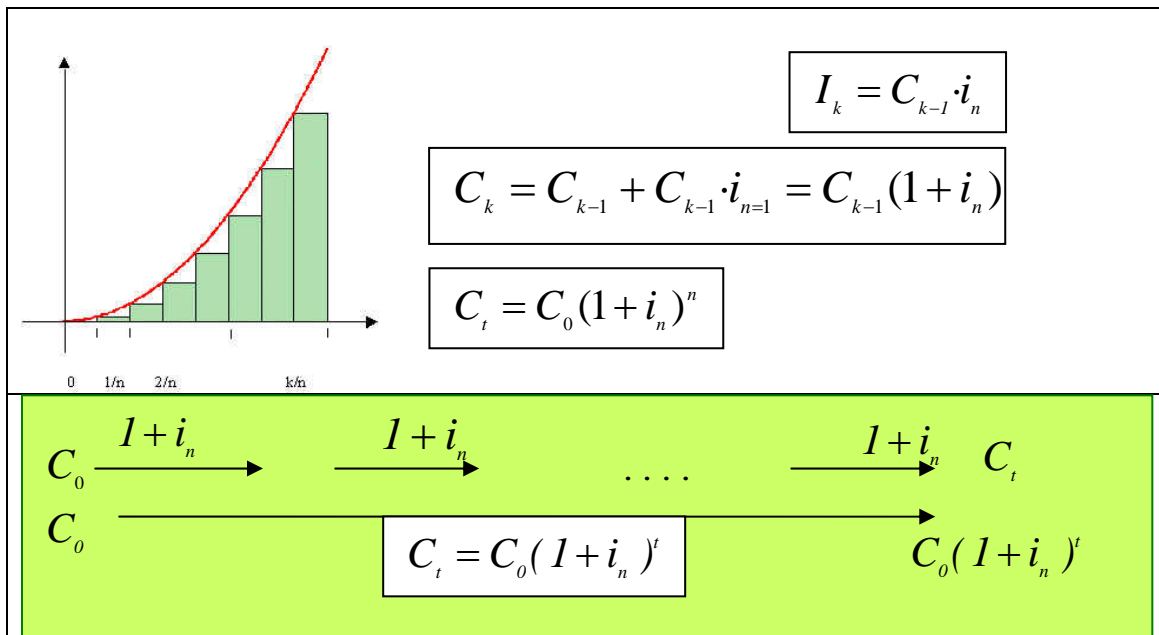
N = Nominal i_{360} = interès unitari diari D = Descompte

E = Efectiu



CAPITALITZACIÓ COMPOSTA:

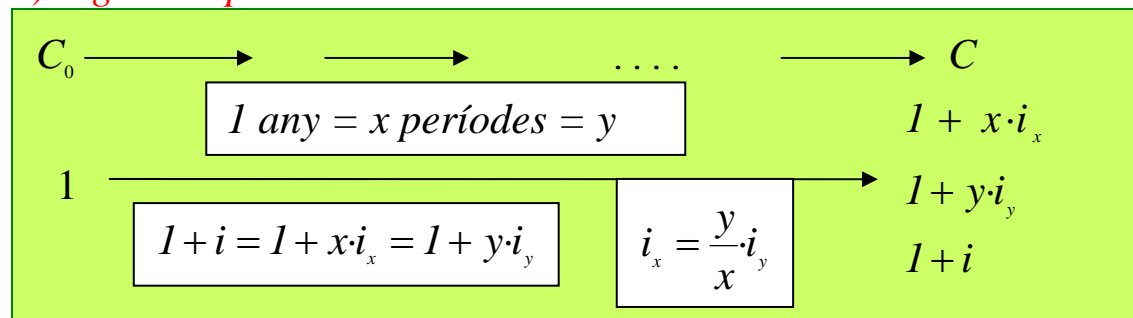
El capital productor d'interessos de cada període és el del període anterior més els interessos del període.



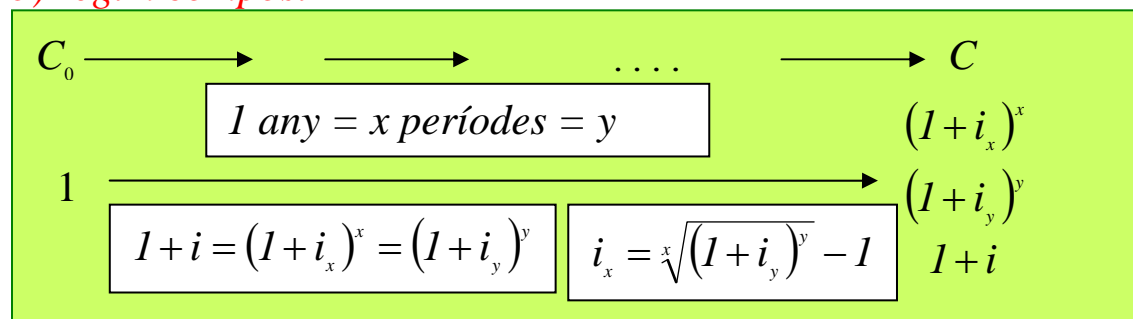
EQUIVALÈNCIA DE TAXES D'INTERÈS

Dues taxes d'interès unitari i_x, i_y capitalitzables a un mateix règim i amb freqüències x, y respectivament són equivalents si: aplicades a un mateix capital inicial en un mateix temps produeixen el mateix capital final o muntant.

a) règim simple



b) règim compost



CALCUL DE L'INTERÈS UNITARI EFECTIU DEL PERÍODE

A PARTIR DE L'INTERÈS ANUAL REAL O EFECTIU ANUAL. (I=TAE)

I any = n períodes

a) A RÈGIM SIMPLE

$$i = \frac{I}{100} \quad \begin{cases} x = n \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow i_x = \frac{y}{x} \cdot i_y \Rightarrow \boxed{i_n = \frac{i}{n}}$$

b) A RÈGIM COMPOST

$$i = \frac{I}{100} \quad \begin{cases} x = n \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow i_x = \sqrt[n]{(1+i_y)^y} - 1 \Rightarrow \boxed{i_n = \sqrt[n]{1+i} - 1}$$

CALCUL DE L'INTERÈS UNITARI EFECTIU DEL PERÍODE A PARTIR DE L'INTERÈS TEÒRIC O NOMINAL DE FREQUÈNCIA (n). NOMINAL = J %

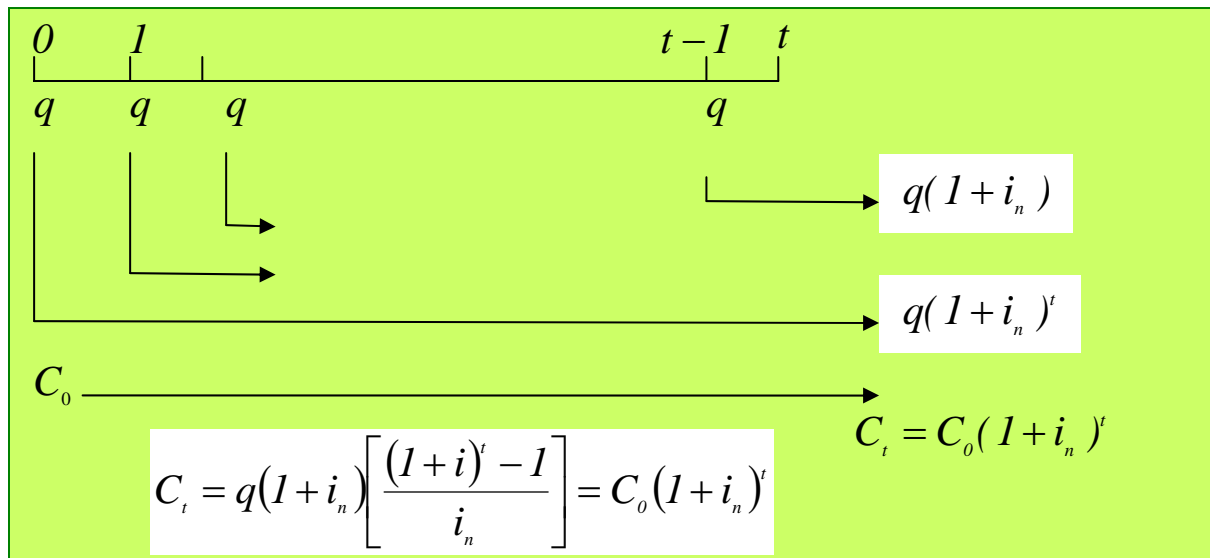
RÈGIM COMPOST

$$\boxed{i_n = \frac{j}{n} = \frac{J}{100 \cdot n}}$$

RELACIÓ ENTRE L'INTERÈS EFECTIU ANUAL (I=TAE) I L'INTERÈS NOMINAL (J) DE PERÍODE (n)

$$\begin{aligned} a) \quad J &\rightarrow i_n = \frac{J}{100n} \rightarrow i = (1+i_n)^n - 1 \rightarrow I = 100i \\ b) \quad I &\rightarrow i = \frac{I}{100} \rightarrow i_n = \sqrt[n]{1+i} - 1 \rightarrow J = 100 \cdot n \cdot i_n \end{aligned}$$

VALOR INICIAL (C₀) I FINAL (C_t) D'UNA RENDA PREPAGABLE AMB QUOTA CONSTANT DE PERÍODE (n) A RÈGIM D'INTERÈS COMPOST



$$q(1+i_n) + \dots + q(1+i_n)^t = q(1+i_n)[1 + \dots + (1+i_n)^{t-1}] = q(1+i_n) \left[\frac{(1+i_n)^t - 1}{i_n} \right]$$

PLA DE PENSIONS

Exemple:

S'ingressa una quota $q=300\text{€}$ al inici de cada mes durant 20 anys a un interès efectiu anual del 8%, calculeu el capital final o muntant i el capital inicial equivalent a aquest muntant.

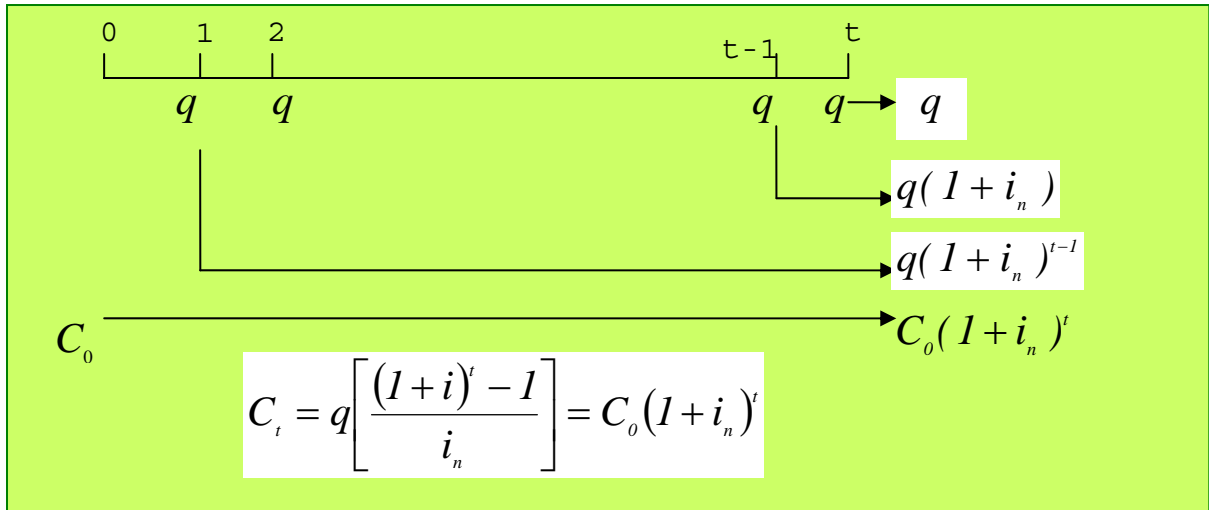
RAONAMENT

$$\begin{cases} n = 12 \\ t = 240 \\ q = 300\text{€} \\ I = 8\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 0'08 \\ i_{12} = \sqrt[12]{1'08} - 1 = 0'006434 \end{cases} \Rightarrow$$

$$C_t = q(1+i_{12}) \frac{[(1+i_{12})^{240} - 1]}{i_{12}} = 300(1'006434) \frac{3'6609}{0'006434}$$

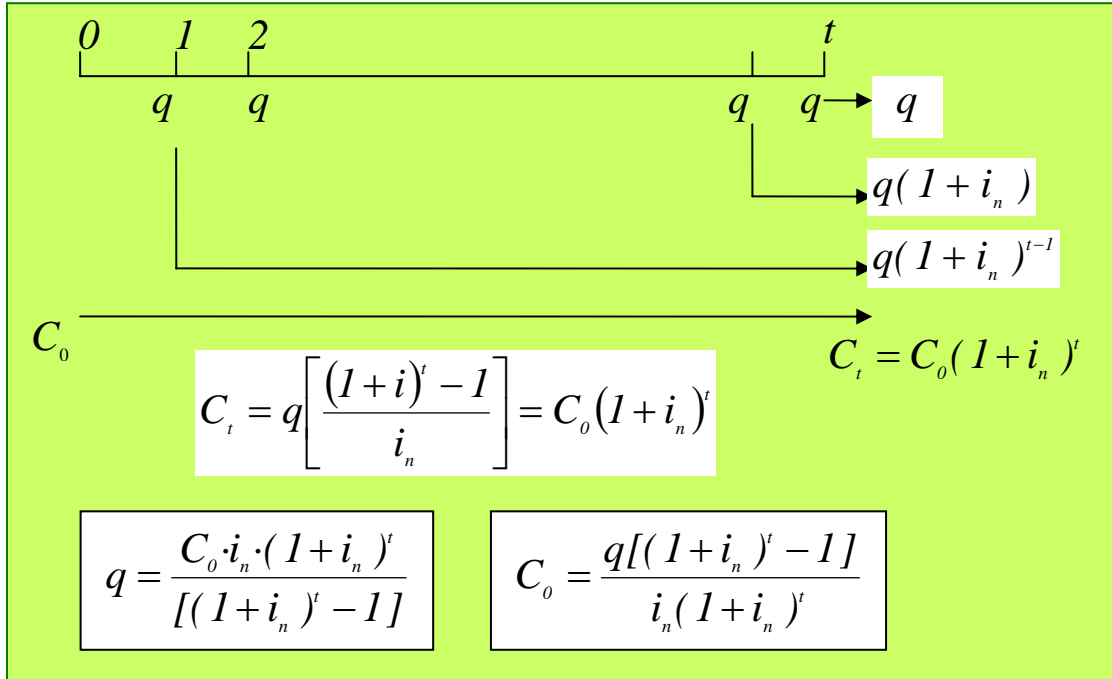
$$\boxed{C_t = 171.797\text{€}} \quad C_0 = \frac{C_t}{(1+i_n)^t} = \frac{171.797}{4'6609} \quad \boxed{C_0 = 36.859\text{€}}$$

VALOR INICIAL(C_0) I FINAL(C_t) RENDA POSPAGABLE AMB QUOTA CONSTANT PERÍODE (n) A RÈGIM D'INTERÈS COMPOST



$$q + \dots + q(1+i_n)^{t-1} = q[1 + \dots + (1+i_n)^{t-1}] = q \left[\frac{(1+i_n)^t - 1}{i_n} \right]$$

HIPOTECA O CRÈDIT BANCARI



capital de la renda al moment **t** $q \frac{[(1+i_n)^t - 1]}{i_n}$

capital bancari al moment **t** $C_0(1+i_n)^t$

equilibri de capitals

$$q \frac{[(1+i_n)^t - 1]}{i_n} = C_0(1+i_n)^t$$

càlcul de la quota q

$$q = \frac{C_0 \cdot i_n \cdot (1+i_n)^t}{[(1+i_n)^t - 1]}$$

Càlcul del capital pendent al pagar la última quota i faltant per pagar t quotes



$$C_p = C_0 = \frac{q[(1+i_n)^t - 1]}{i_n(1+i_n)^t}$$

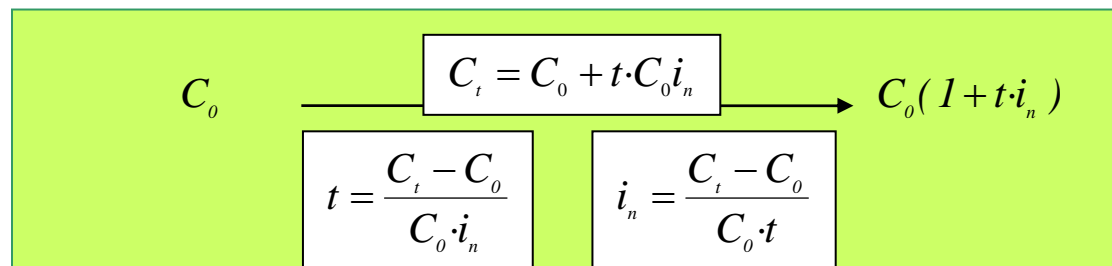
EXERCICIS

1.-CAPITALITZACIÓ SIMPLE

1.1

Calculeu el temps en que es varen invertir 12.500€ a una taxa d'interès simple anual del 4'5% si el capital final o muntant generat va ser de 14.187€.

RAONAMENT



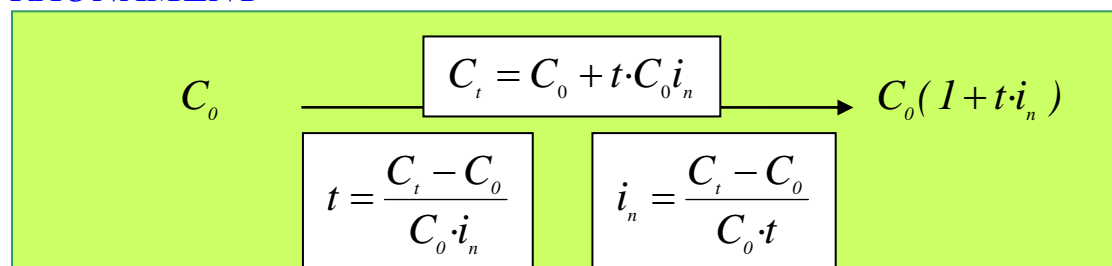
$$\begin{cases} C_0 = 12.500\text{€} \\ n = 1 \\ C_t = 14.187\text{€} \\ I = 4'5\% \end{cases} \Rightarrow i_n = i = 0'045 \Rightarrow t = \frac{14.187 - 12.500}{12.500 \cdot 0'045}$$

\Rightarrow $t = 3$ anys

1.2

Varem prestar 270.455 € el 8 de març a règim d'interès simple al 12% anual. Determina la quantitat del capital que ens pertocarà el 25 de juny.

RAONAMENT



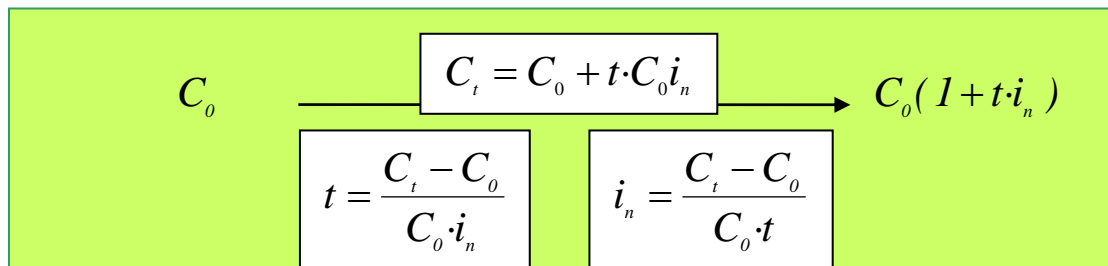
$$\begin{cases} C_0 = 270.455\text{€} \\ n = 360\text{dies} \\ t = 109\text{dies} \\ I = 12\% \end{cases} \Rightarrow i_n = i_{360} = \frac{0'12}{360} \Rightarrow C_{109} = 270.455 \left(1 + \frac{0'12}{360} \cdot 109 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{109} = 280.282\text{€}}$$

1.3

Un capital de 300.506 € prestat a règim d'interès simple en 8 mesos produeix uns interessos de 30.051 €. Calculeu la taxa anual

RAONAMENT



$$\begin{cases} n = 12\text{mesos} \\ t = 8\text{mesos} \\ C_0 = 300.506\text{€} \\ C_8 - C_0 = 30.051\text{€} \end{cases} \Rightarrow i_n = \frac{C_t - C_0}{C_0 \cdot t} \Rightarrow i_{12} = \frac{30.051}{300.506 \cdot (8)}$$

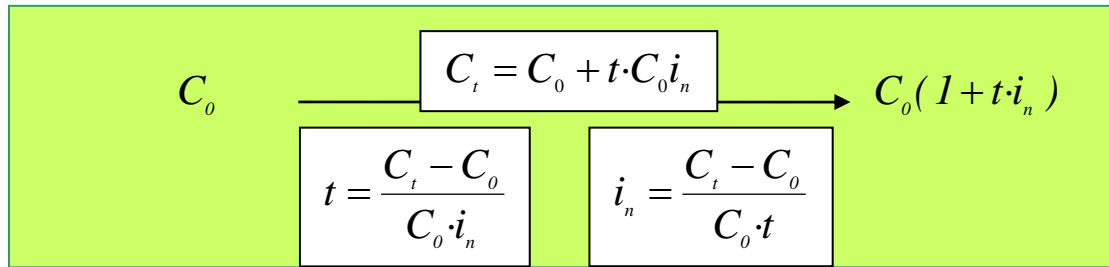
$$\Rightarrow i_{12} = 0'0125 \Rightarrow i = 12 \cdot 0'0125 = 0'15 \Rightarrow \boxed{I = 15\%}$$

1.4

Un capital al 11% d'interès simple en 310 dies han produït uns interessos de 6.148 €. Trobeu el capital inicial i el capital

resultant.

RAONAMENT



$$\begin{cases} n = 360 \text{ dies} \\ t = 310 \text{ dies} \\ C_t - C_0 = 6.148 \text{€} \\ I = 11\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 0'11 \\ i_{360} = \frac{0'11}{360} \end{cases} \Rightarrow C_{310} - C_0 = C_0 \cdot t \cdot i_{360} \Rightarrow$$

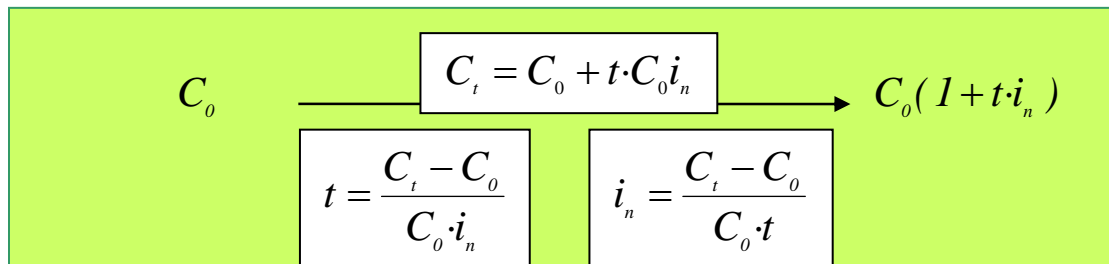
$$C_0 = \frac{6.148}{310 \cdot \left(\frac{0'11}{360}\right)} = 64.905 \text{€}$$

$$C_{310} = C_0 + 6.148 = 71.053 \text{€}$$

1.5

Calculeu la taxa d'interès anual per a que un capital a règim d'interès simple es dupliqui en 30 anys.

RAONAMENT



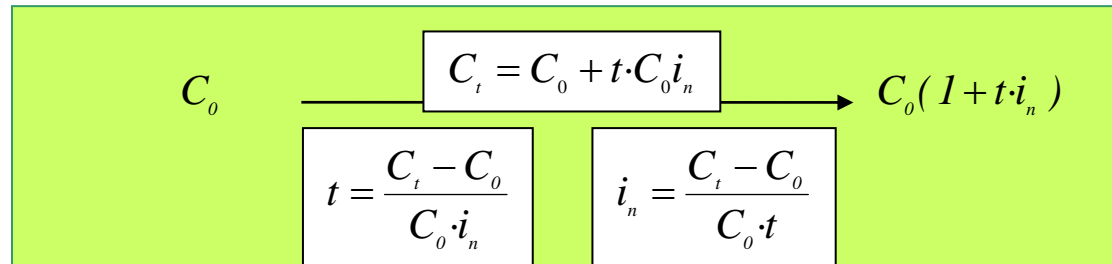
$$\begin{cases} n = 1 \text{ any} \\ t = 30 \text{ anys} \\ C_{30} = 2C_0 \end{cases} \Rightarrow 2C_0 = C_0(1 + 30 \cdot i) \Rightarrow i = \frac{2-1}{30} = 0'03333 \Rightarrow$$

$$I = 3'33\%$$

1.6

Calculeu el temps necessari per a que un capital col·locat al 11% a règim d'interès simple es tripliqui.

RAONAMENT



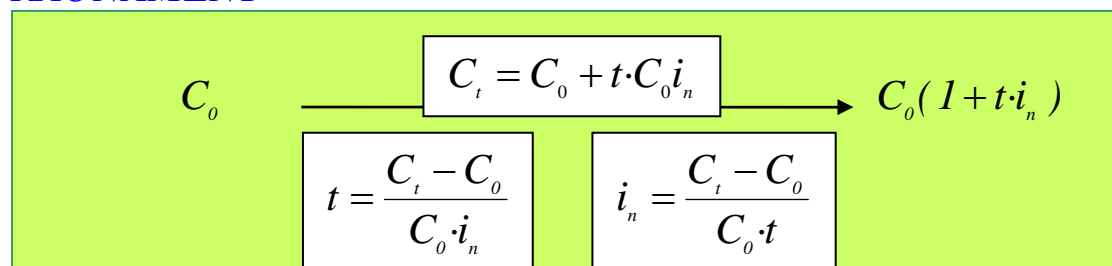
$$\begin{cases} n = 1 \text{ any} \\ I = 11\% \Rightarrow i = 0'11 \\ C_t = 3C_0 \end{cases} \Rightarrow 3C_0 = C_0(1 + t \cdot 0'11) \Rightarrow t = \frac{3-1}{0'11}$$

$$\Rightarrow t = 18'18 \text{ anys} \Rightarrow \boxed{18 \text{ anys i 65 dies}}$$

1.7

Un capital prestat a interès simple al 10% anual, en 190 dies va produir un muntant de 94.910 €. Trobeu aquest capital.

RAONAMENT



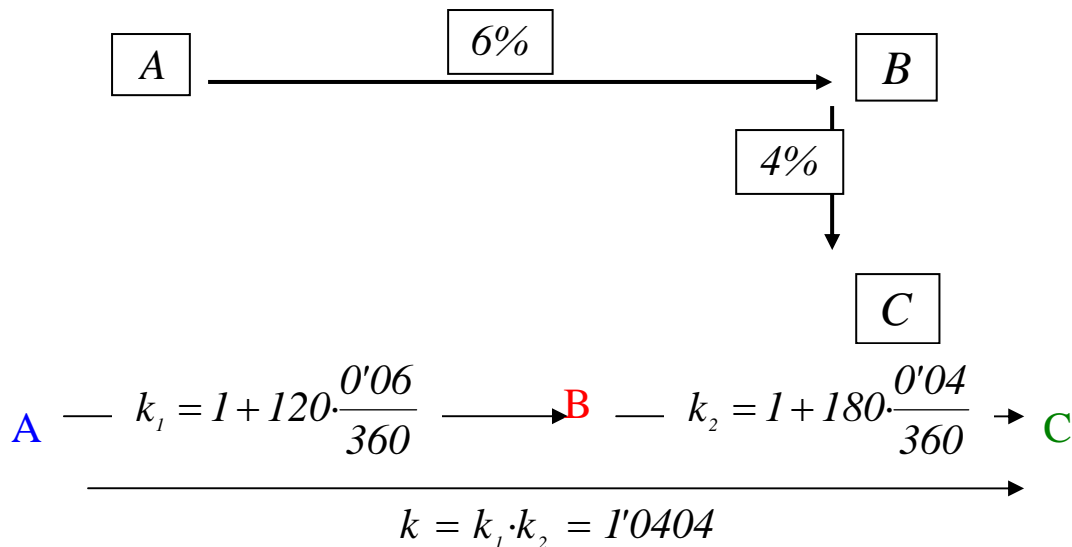
$$\begin{cases} n = 360 \text{ dies} \\ t = 190 \text{ dies} \\ I = 10\% \\ C_{190} = 94.910 \text{€} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 0'1 \\ i_{360} = \frac{0'1}{360} \end{cases} \Rightarrow C_{190} = C_0(1 + 190 \cdot \frac{0'1}{360}) \Rightarrow$$

$$C_o = \frac{94.910}{\left(1 + 190 \cdot \frac{0'1}{360}\right)} \quad \boxed{C_o = 90.152\text{€}}$$

1.8

Hem col·locat un capital **A** amb interès simple del 6% anual durant 120 dies i del muntant obtingut **B** l'hem tornat a col·locar al 4% anual simple durant 180 dies produint un muntant **C** = 8.754 €. Trobeu el capital inicial.

RAONAMENT



$$A = \frac{C}{k} = \frac{8.754}{1'0404} \quad \boxed{A = 8.414\text{€}}$$

1.9

S'han prestat 540.911 € a règim d'interès simple durant 150 dies al 12% anual. Quins interessos o benefici han devingut?

RAONAMENT

$$C_0 \xrightarrow{C_t = C_0 + t \cdot C_0 \cdot i_n} C_0(1 + t \cdot i_n)$$

$t = \frac{C_t - C_0}{C_0 \cdot i_n}$

$i_n = \frac{C_t - C_0}{C_0 \cdot t}$

$\left\{ \begin{array}{l} n = 360 \text{ dies} \\ t = 150 \text{ dies} \\ I = 12\% \\ C_0 = 540.911 \text{€} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 0'12 \\ i_{360} = \frac{0'12}{360} \end{array} \right. \Rightarrow \text{benefici} = B = C_{150} - C_0 = C_0 \cdot t \cdot i_{360}$

$\Rightarrow \quad B = 540.911 \cdot 150 \cdot \frac{0'12}{360} = 27.045'5 \text{€}$

1.10

Determineu el temps necessari per què un capital al 12% simple anual es quadruplicui.

RAONAMENT

$$C_0 \xrightarrow{C_t = C_0 + t \cdot C_0 \cdot i_n} C_0(1 + t \cdot i_n)$$

$t = \frac{C_t - C_0}{C_0 \cdot i_n}$

$i_n = \frac{C_t - C_0}{C_0 \cdot t}$

$\left\{ \begin{array}{l} n = 1 \text{ any} \\ I = 12\% \Rightarrow i = 0'12 \\ C_t = 4C_0 \end{array} \right. \Rightarrow 4C_0 = C_0(1 + t \cdot 0'12) \Rightarrow t = \frac{4 - 1}{0'12}$

$\Rightarrow \quad t = 25 \text{ anys}$

Xavier rabasa

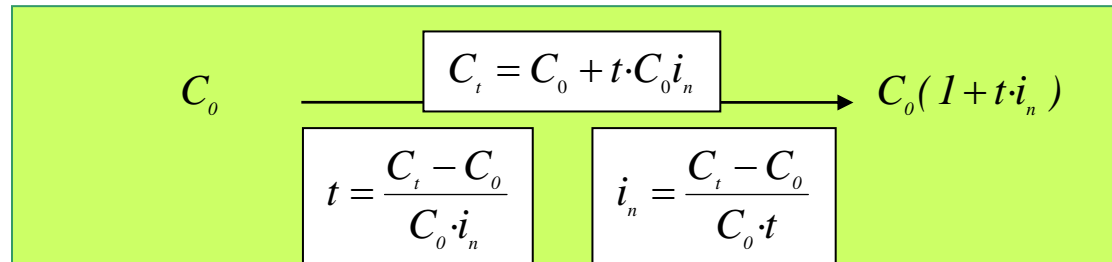
jrabasa@xtec.cat

51

1.11

Un capital de 24.040 € prestat a interès simple 6 anys 3 mesos i 4 dies han produït uns interessos de 3.005 €. Calculeu la taxa anual del préstec. (1any = 360 dies 1 mes = 30 dies)

RAONAMENT



$$\begin{cases} n = 360 \text{ dies} \\ t = 6 \cdot 360 + 3 \cdot 30 + 4 = 2254 \text{ dies} \\ C_0 = 24.040 \text{ €} \\ C_{2254} = 24.040 + 3.005 = 27.045 \text{ €} \end{cases} \Rightarrow C_{2254} = C_0(1 + 2.254 \cdot i_{360})$$

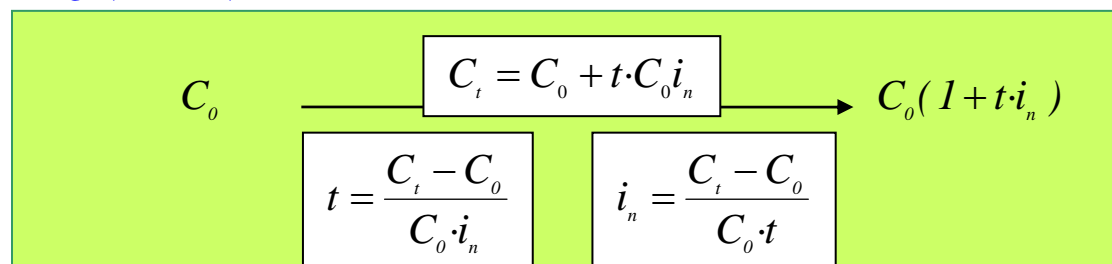
$$\Rightarrow i_{360} = \frac{C_{2254} - C_0}{2.254 \cdot C_0} = \frac{3.005}{2.254 \cdot 24.040} = 0'00005546 \Rightarrow$$

$$i = 360 \cdot i_{360} = 0'02 \Rightarrow \boxed{I = 2\%}$$

1.12

A quina taxa d'interès simple anual s'ha de prestar un capital durant 10 mesos per obtenir uns interessos iguals a la cinquena part del capital prestat.

RAONAMENT

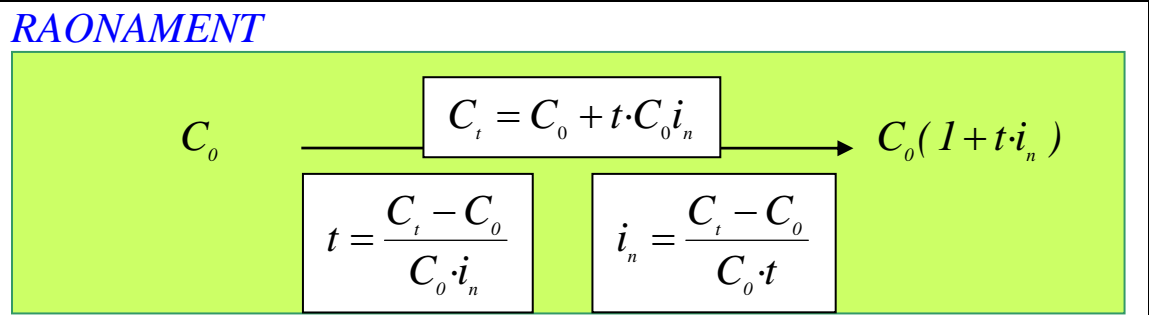


$$\left\{ \begin{array}{l} n = 12 \text{mesos} \\ t = 10 \text{mesos} \\ C_{10} - C_0 = \frac{1}{5} C_0 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{1}{5} C_0 = C_0 \cdot 10 \cdot i_{12} \Rightarrow i_{12} = \frac{1}{50} \Rightarrow$$

$$i = 12 \cdot \frac{1}{50} = 0'24 \Rightarrow \boxed{I = 24\%}$$

1.13

Un banc ens assegura uns interessos de 780 € si obrim una llibreta a termini amb 24.000€ des del 15 de juny fins a final d'any. Quina és la taxa d'interès anual si l'operació és a interès simple.



$$\left\{ \begin{array}{l} n = 360 \text{dies} \\ t = 6 \cdot 30 + 15 = 195 \text{dies} \\ C_0 = 24.000\text{€} \\ C_{195} - C_0 = 780\text{€} \end{array} \right. \Rightarrow i_n = \frac{C_t - C_0}{C_0 \cdot t} \Rightarrow$$

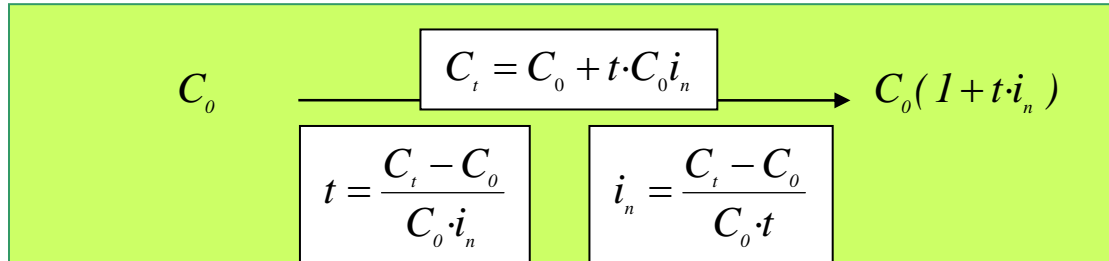
$$i_{360} = \frac{780}{24.000 \cdot 195} = 0'0001666 \Rightarrow i = 360 \cdot 0'0001666 = 0'06$$

$$\Rightarrow \boxed{I = 6\%}$$

1.14

Calculeu el temps que triga un capital en duplicar-se al 5% d'interès simple anual.

RAONAMENT



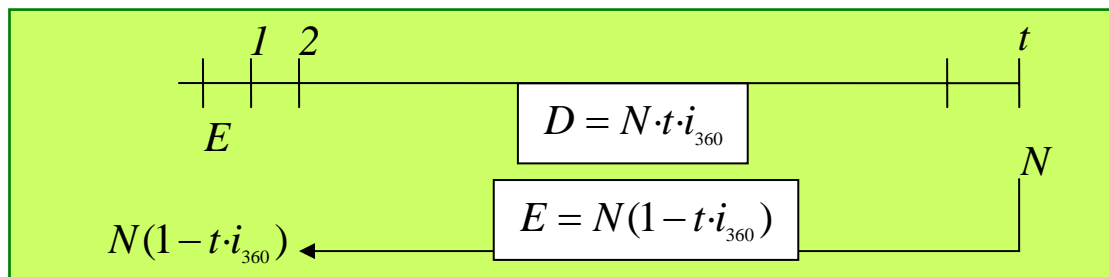
$$\begin{cases} n = 1 \text{ any} \\ I = 5\% \Rightarrow i = 0'05 \\ C_t = 2C_0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{C_t - C_0}{C_0 \cdot i_n} \Rightarrow t = \frac{2 - 1}{0'05} \Rightarrow$$

$t = 20 \text{ anys}$

1.15

Per una lletra de canvi de 7.500€, amb venciment al cap de 30 dies, i amb descompte comercial, s'abonen 7.425€. Quina taxa d'interès s'ha cobrat?

RAONAMENT



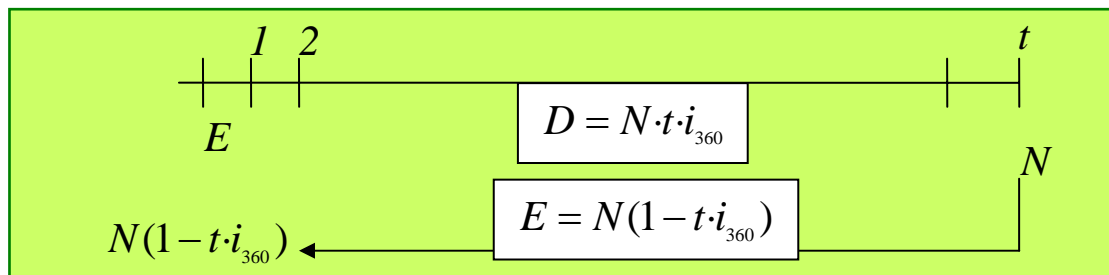
$$\begin{cases} n = 360 \text{ dies} \\ t = 30 \text{ dies} \\ N = 7.500\text{€} \\ E = 7.425\text{€} \end{cases} \Rightarrow i_{360} = \frac{N - E}{N \cdot t} = \frac{75}{7.500 \cdot 30} = 0'0003333 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = 360 \cdot i_{360} = 0'12 \Rightarrow \boxed{I = 12\%}$$

1.16

Calculeu el descompte comercial i l'efectiu d'una lletra de 259.637 € al 10% avançada en 40 dies.

RAONAMENT



$$\begin{cases} n = 360 \text{ dies} \\ t = 40 \text{ dies} \\ N = 259.637 \text{ €} \\ I = 10\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 0'1 \\ i_{360} = \frac{0'1}{360} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} D = 259.637 \cdot 40 \cdot \frac{0'1}{360} = 2.885 \\ E = N - D = 259.637 - 2.885 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} D = 2.885 \text{ €} \\ E = 256.752 \text{ €} \end{matrix}}$$

1.17

Una lletra de canvi de 1.250 € es descompta al 8% 60 dies abans del seu venciment. Calcula'n el descompte comercial i l'efectiu.

RAONAMENT

$n = 360 \text{ dies}$
 $t = 60 \text{ dies}$
 $N = 1.250 \text{ €}$
 $I = 8\%$

$$\Rightarrow \begin{cases} i = 0'08 \\ i_{360} = \frac{0'08}{360} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = 1.250 \cdot 60 \cdot \frac{0'08}{360} = 16'67 \text{ €} \\ E = N - D = 1.250 - 16'67 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} D = 16'67 \text{ €} \\ E = 1.233'33 \text{ €} \end{cases}$

1.18

Calculeu el descompte racional i l'efectiu d'una lletra de 180.304 € al 15% anual avançada 70 dies.

RAONAMENT

$n = 360 \text{ dies}$
 $t = 70 \text{ dies}$
 $N = 180.304 \text{ €}$
 $I = 15\%$

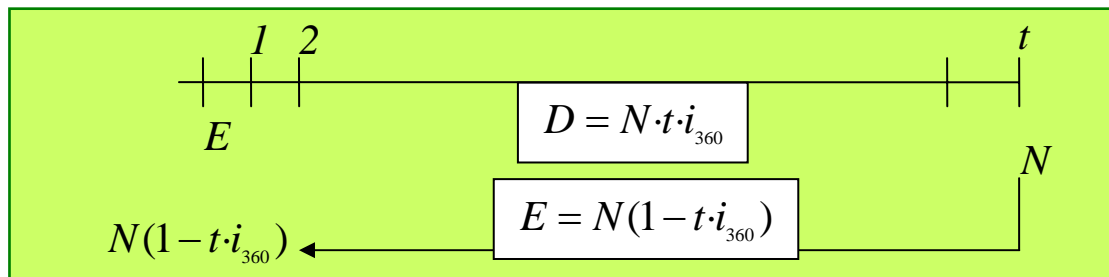
$$\Rightarrow \begin{cases} i = 0'15 \\ i_{360} = \frac{0'15}{360} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E = \frac{180.304}{\left(1 + 70 \cdot \frac{0'15}{360}\right)} = 175.194 \\ D = 175.194 \cdot 70 \cdot \frac{0'15}{360} = 5.110 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = 5.110\text{€} \\ E = 175.194\text{€} \end{cases}$$

1.19

Calculeu el valor efectiu que s'obté al descomptar l'1 de novembre una lletra de 156.263 € amb descompte comercial al 9% anual i venciment l'11 de desembre.

RAONAMENT



$$\begin{cases} n = 360 \text{ dies} \\ t = 30 + 11 = 41 \text{ dies} \\ N = 156.263 \text{ €} \\ I = 9\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 0'09 \\ i_{360} = \frac{0'09}{360} \end{cases} \Rightarrow$$

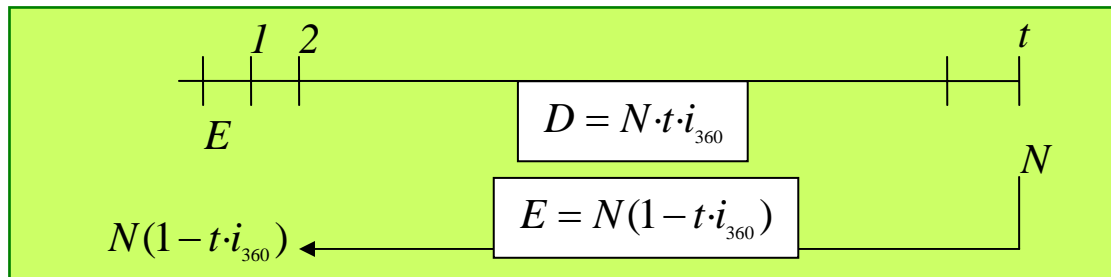
$$\begin{cases} D = 156.263 \cdot 40 \cdot \frac{0'09}{360} = 1.563 \\ E = N - D = 156.263 - 1.563 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = 1.563\text{€} \\ E = 154.700\text{€} \end{cases}$$

1.20

Calculeu el nominal d'una lletra amb descompte comercial i

venciment el 31 de maig , que descomptada l'1 de maig al 12% va donar un efectiu de 33.320 €.

RAONAMENT



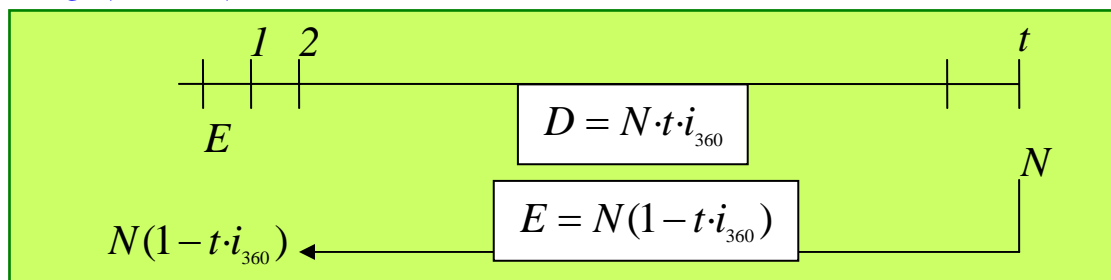
$$\begin{cases} n = 360 \text{ dies} \\ t = 30 \text{ dies} \\ E = 33.320 \text{€} \\ I = 12\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 0'12 \\ i_{360} = \frac{0'12}{360} \end{cases} \Rightarrow N = \frac{E}{1 - t \cdot i_{360}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = \frac{33.320}{\left(1 - 30 \cdot \frac{0'12}{360}\right)} = 33.657 \quad \boxed{N = 33.657 \text{€}}$$

1.21

Un crèdit de 540.911 € descomptat comercialment al 8% ha produït un efectiu de 533.699 €. Quant de temps es va anticipar en el pagament?

RAONAMENT



$$\begin{cases} n = 360 \text{ dies} \\ N = 540.911\text{€} \\ E = 533.699\text{€} \\ I = 8\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 0'08 \\ i_{360} = \frac{0'08}{360} \end{cases} \Rightarrow t = \frac{N - E}{N \cdot i_{360}} \Rightarrow$$

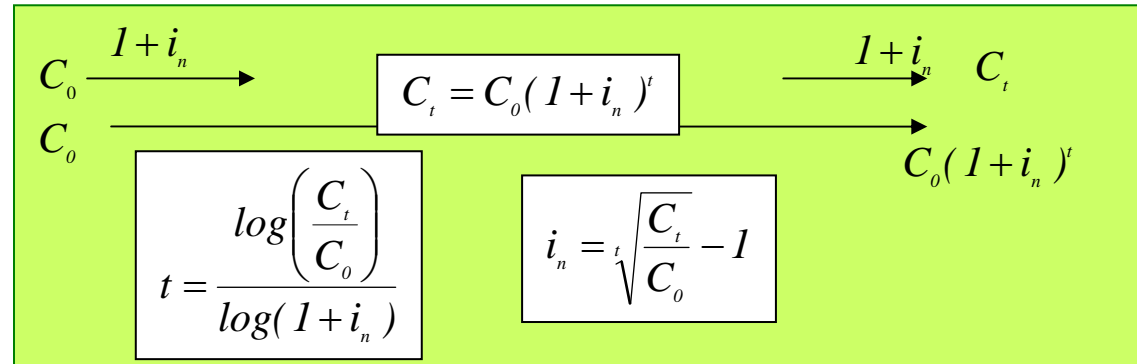
$$\Rightarrow t = \frac{7.212}{540.911 \cdot \frac{0'08}{360}} = 60 \quad \boxed{t = 60 \text{ dies}}$$

2.-CAPITALITZACIÓ COMPOSTA

2.1

Fa quatre anys vaig prestar 60.101 € al 8% anual compost . Quin capital obtindrè dintre de dos anys?

RAONAMENT



$$\left\{ \begin{array}{l} n = 1 \text{ any} \\ t = 6 \text{ anys} \\ C_0 = 60.101 \text{€} \\ I = 8\% \end{array} \right. \Rightarrow i = 0'08 \Rightarrow C_6 = C_0(1+i)^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_6 = 60.101(1+0'08)^6 \quad \boxed{C_6 = 95.373}$$

2.2

Quant de temps vaig invertir un capital de 360.607 € al 4% anual compost per obtenir un muntant de 474.535 € ?

RAONAMENT

$C_0 \xrightarrow{1+i_n} C_t = C_0(1+i_n)^t \xrightarrow{1+i_n} C_t$
 $C_0 \xrightarrow{\quad\quad\quad} C_0(1+i_n)^t$

$$t = \frac{\log\left(\frac{C_t}{C_0}\right)}{\log(1+i_n)}$$

$$i_n = \sqrt[t]{\frac{C_t}{C_0}} - 1$$

$\left\{ \begin{array}{l} n = 1 \text{ any} \\ C_0 = 360.607\text{€} \\ C_t = 474.535\text{€} \\ I = 4\% \end{array} \right. \Rightarrow i = 0'04 \Rightarrow C_t = C_0(1+i)^t \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{\log\left(\frac{C_t}{C_0}\right)}{\log(1+i_n)} \Rightarrow t = \frac{\log\left(\frac{474.535}{360.607}\right)}{\log 1'04} = 7 \Rightarrow \boxed{t = 7 \text{ anys}}$

2.3

Calculeu la taxa unitària anual si se sap que un capital de 150.253 € invertit en règim d'interès compost durant 6 anys don un muntant de 201.353 €.

RAONAMENT

$C_0 \xrightarrow{1+i_n} C_t = C_0(1+i_n)^t \xrightarrow{1+i_n} C_t$
 $C_0 \xrightarrow{\quad\quad\quad} C_0(1+i_n)^t$

$$t = \frac{\log\left(\frac{C_t}{C_0}\right)}{\log(1+i_n)}$$

$$i_n = \sqrt[t]{\frac{C_t}{C_0}} - 1$$

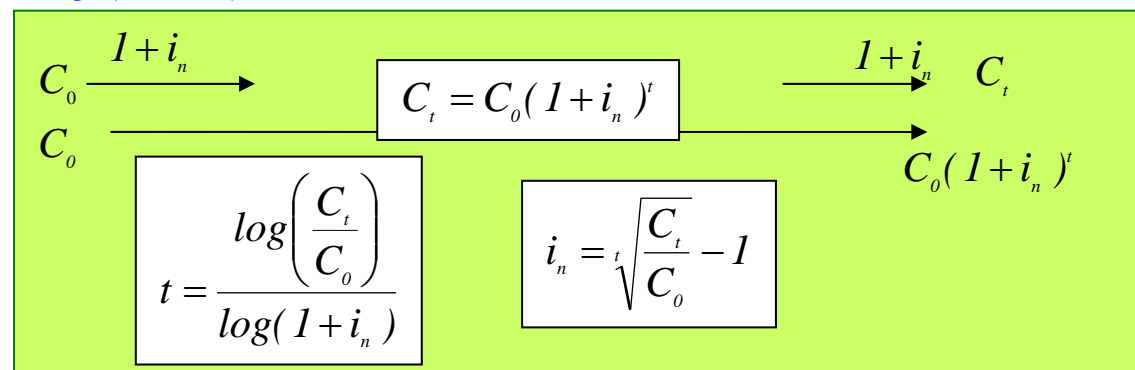
$$\begin{cases} n = 1 \text{ any} \\ t = 6 \text{ anys} \\ C_0 = 150.253\text{€} \\ C_6 = 201.353\text{€} \end{cases} \Rightarrow C_6 = C_0(1+i)^6 \Rightarrow 1+i = \sqrt[6]{\frac{C_6}{C_0}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = \sqrt[6]{\frac{201.353}{150.253}} - 1 \Rightarrow \boxed{i = 0'05} \Rightarrow I = 5\%$$

2.4

Determineu el capital inicial que invertit al 8% anual en règim compost durant 15 anys produeix un muntant de 203.079 €.

RAONAMENT



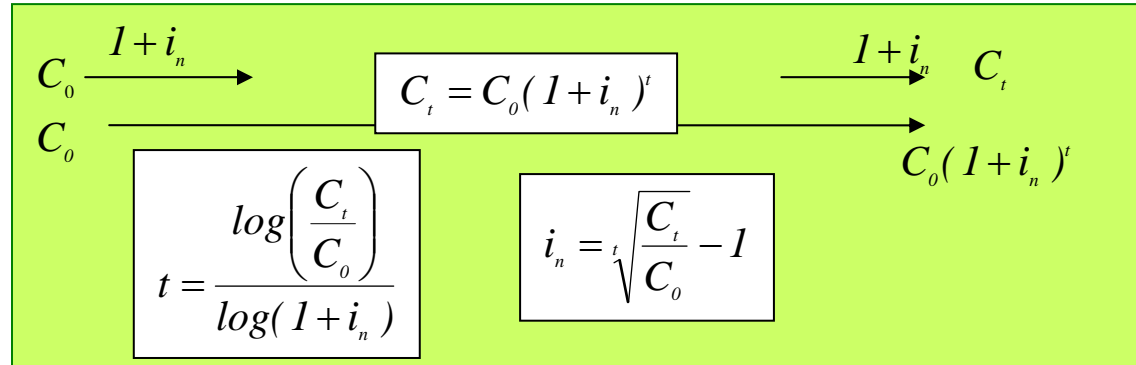
$$\begin{cases} n = 1 \text{ any} \\ t = 15 \text{ anys} \\ C_{15} = 203.079\text{€} \\ I = 8\% \end{cases} \Rightarrow i = 0'08 \Rightarrow C_{15} = C_0(1+i)^{15} \Rightarrow$$

$$C_0 = \frac{C_{15}}{(1+i)^{15}} \Rightarrow C_0 = \frac{203.079}{(1'08)^{15}} \Rightarrow \boxed{C_0 = 64.019\text{€}}$$

2.5

Determineu el sou mensual que tindrà una persona dintre de 10 anys si ara és de 601€ amb un augment acumulatiu anual del 7%.

RAONAMENT

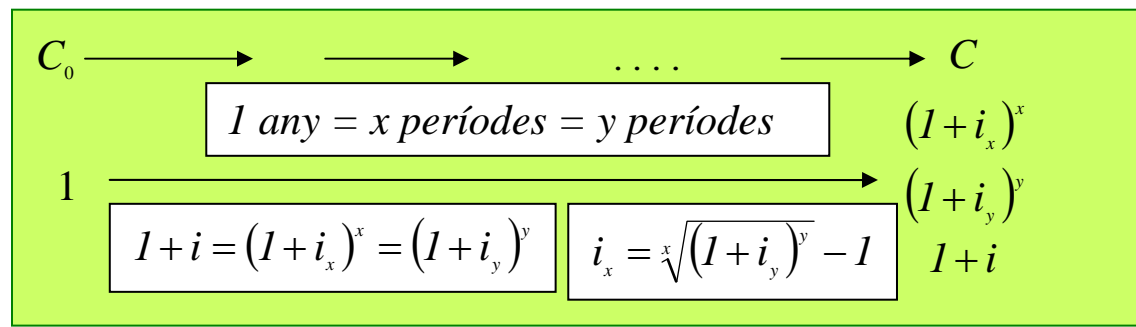


$\begin{cases} n = 1 \text{ any} \\ t = 10 \text{ anys} \\ C_0 = 601 \text{€} \\ I = 7\% \end{cases} \Rightarrow i = 0'07 \Rightarrow C_{10} = C_0(1+i)^{10} \Rightarrow$
 $\Rightarrow C_{10} = 610(1'07)^{10} \Rightarrow \boxed{C_{10} = 1.182 \text{€}}$

2.6

Quina és la taxa d'interès compost trimestral equivalent al 6% semestral ?

RAONAMENT



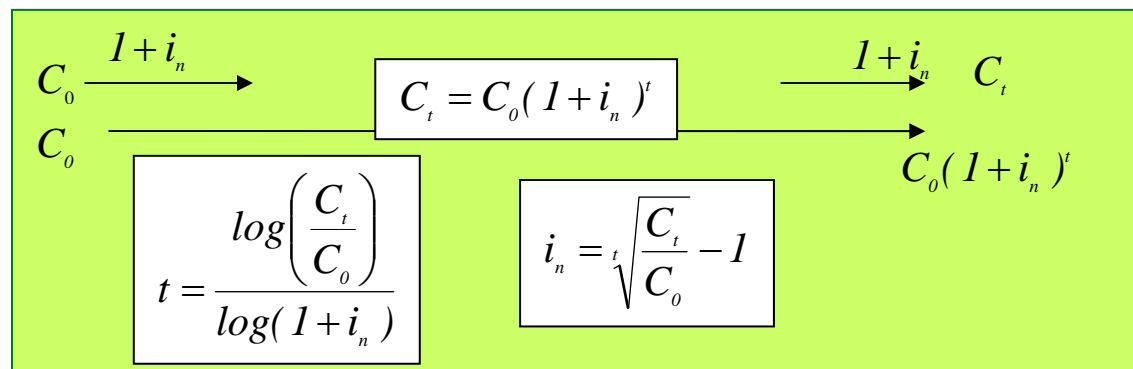
$\begin{cases} I_2 = 6\% \\ i_2 = 0'06 \end{cases} \Rightarrow (1+i_4)^4 = (1+i_2)^2 \Rightarrow i_4 = \sqrt[4]{(1+i_2)^2} - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow i_4 = \sqrt[4]{1'06^2} - 1 \Rightarrow \begin{cases} i_4 = 0'02956 \\ I_4 = 2'956\% \end{cases}$$

2.7

Un capital de 270.455 € s'inverteix al 7% anual amb règim compost. Calculeu el temps que necessita per obtenir un muntant de 379.328 €

RAONAMENT



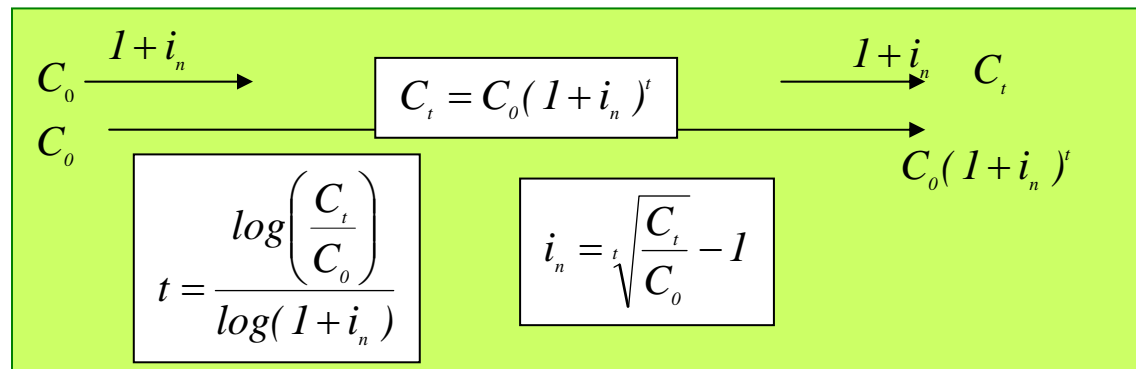
$$\begin{cases} n = 1 \text{ any} \\ C_0 = 270.455\text{€} \\ C_t = 379.328\text{€} \\ I = 7\% \end{cases} \Rightarrow i = 0'07 \Rightarrow C_t = C_0(1+i_n)^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log\left(\frac{C_t}{C_0}\right)}{\log(1+i_n)} \Rightarrow t = \frac{\log\left(\frac{379.328}{270.455}\right)}{\log(1'07)} = 5 \quad \boxed{t = 5 \text{ anys}}$$

2.8

Amb una taxa d'inflació anual acumulativa del 6%, quant valdrà a l'any 2010 un euro de l'any 2002 ?

RAONAMENT

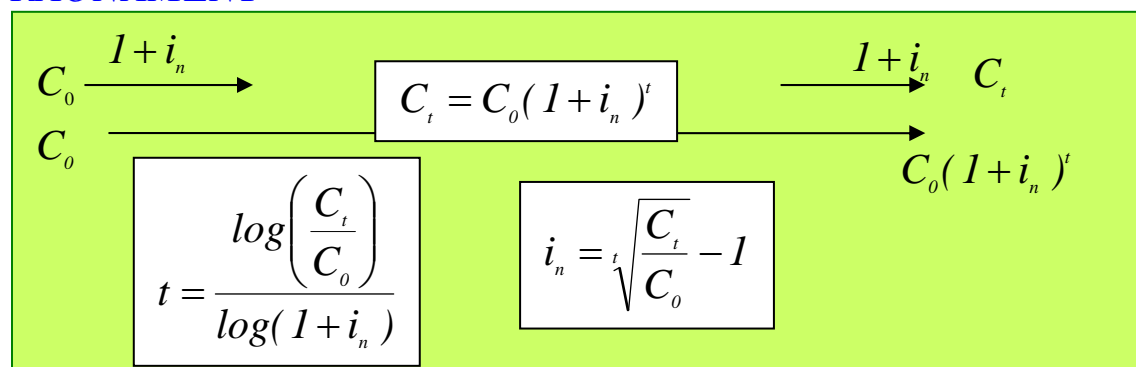


$$\begin{cases} n = 1 \text{ any} \\ t = 8 \text{ anys} \\ C_0 = 1 \text{ €} \\ I = -6\% \end{cases} \Rightarrow i = -0'06 \Rightarrow C_8 = 1 \cdot (0'94)^8 = 0'6095 \text{ €}$$

2.9

Dos capitals iguals invertits al 6% i 8% anual compost durant 4 i 5 anys respectivament, produeixen uns interessos on la seva diferència és de 124.320 €. Calculeu el capital invertit per cadascun d'ells.

RAONAMENT



a)

$$\begin{cases} n = 1 \text{ any} \\ t = 4 \text{ anys} \\ I = 6\% \end{cases} \Rightarrow i = 0'06 \Rightarrow \begin{cases} C_0 \\ C_4 = 1'06^4 C_0 \end{cases} \Rightarrow B_1 = 0'26247 C_0$$

b)

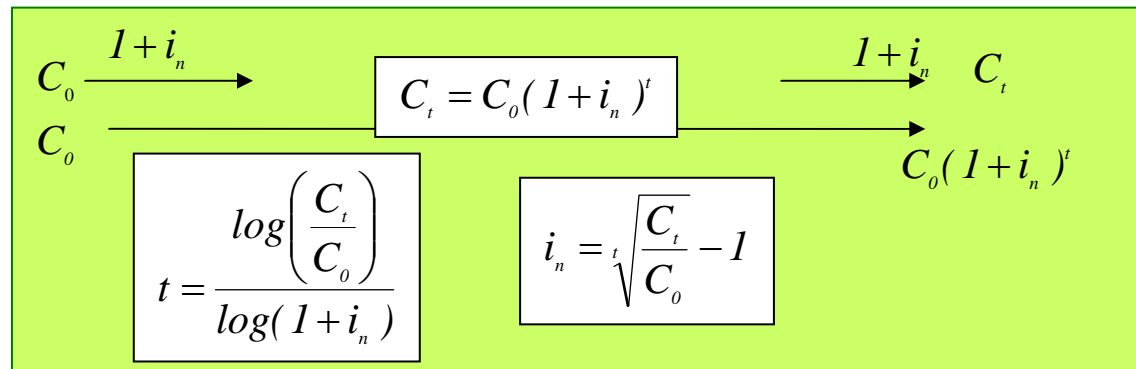
$$\begin{cases} n = 1 \text{ any} \\ t = 5 \text{ anys} \\ I = 8\% \end{cases} \Rightarrow i = 0'08 \Rightarrow \begin{cases} C_0 \\ C_5 = 1'08^5 C_0 \end{cases} \Rightarrow B_2 = 0'46932 C_0$$

$$B_2 - B_1 = 124.320 = 0'20685 C_0 \Rightarrow C_0 = \frac{124.320}{0'20685} = 601.015\text{€}$$

2.10

Calculeu el muntant que s'obté d'invertir un capital de 18.030 € al 12% nominal amb freqüència quadrimestral a règim compost durant 2 anys.

RAONAMENT



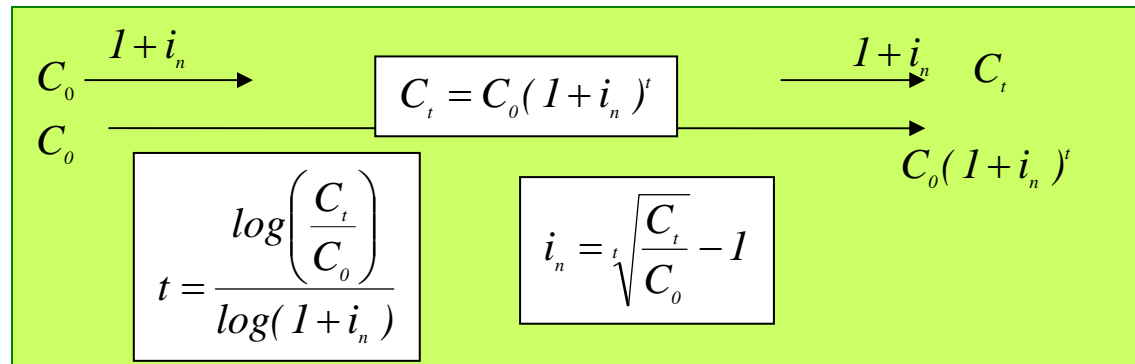
$$\begin{cases} n = 3 \text{ quadrimestres} \\ t = 6 \text{ quadrimestres} \\ C_0 = 18.030\text{€} \\ J = 12\% \end{cases} \Rightarrow I_3 = \frac{J}{3} = 4\% \Rightarrow i_3 = 0'04 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_6 = 18.030 \cdot 1'04^6 = 22.814\text{€}$$

2.11

Trobeu el muntant obtingut d'invertir 1.000 € durant 4 anys en

règim compost els casos següents: **a)** al 8% anual. **b)** al 8% nominal semestral. **c)** al 4% semestral.

RAONAMENT



a) $\left\{ \begin{array}{l} n = 1 \text{ any} \\ t = 4 \text{ anys} \\ C_0 = 1.000\text{€} \\ I = 8\% \end{array} \right. \Rightarrow i = 0'08 \Rightarrow C_4 = 1.000 \cdot 1'08^4 = 1360'48\text{€}$

b) $\left\{ \begin{array}{l} n = 2 \text{ semestres} \\ t = 8 \text{ semestres} \\ C_0 = 1.000\text{€} \\ J = 8\% \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} I_2 = 4\% \\ i_2 = 0'04 \end{array} \Rightarrow C_8 = 1.000 \cdot 1'04^8 = 1368'57\text{€}$

c) $\left\{ \begin{array}{l} n = 2 \text{ semestres} \\ t = 8 \text{ semestres} \\ C_0 = 1.000\text{€} \\ I_2 = 4\% \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} I_2 = 4\% \\ i_2 = 0'04 \end{array} \Rightarrow C_8 = 1.000 \cdot 1'04^8 = 1368'57\text{€}$

2.12

He participat en un fons d'inversió amb un capital d'1.803.036 € i als 10 dies recupero un muntant de 1.809.468 €; calculeu: **a)** la taxa d'interès compost diari que s'ha produït, **b)** la taxa efectiva anual que ha resultat.

RAONAMENT

$C_0 \xrightarrow{1+i_n} \boxed{C_t = C_0(1+i_n)^t} \xrightarrow{1+i_n} C_t$
 $C_0 \xrightarrow{\quad\quad\quad} C_0(1+i_n)^t$

$$t = \frac{\log\left(\frac{C_t}{C_0}\right)}{\log(1+i_n)}$$

$$i_n = \sqrt[t]{\frac{C_t}{C_0}} - 1$$

$\left\{ \begin{array}{l} n = 360 \text{ dies} \\ t = 10 \text{ dies} \\ C_0 = 1.803.036\text{€} \\ C_{10} = 1.809.468\text{€} \end{array} \right. \Rightarrow i_{360} = \sqrt[10]{\frac{C_{10}}{C_0}} - 1 = \sqrt[10]{\frac{1.809.468}{1.803.036}} - 1 \Rightarrow$

a) $\left\{ \begin{array}{l} i_{360} = 0'000356164 \\ I_{360} = 0'0356164\% \end{array} \right.$

b) $1+i = (1+i_{360})^{360} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} i = 1'000356164^{360} - 1 = 0'1388 \\ I = 13'88\% \end{array} \right.$

2.13

Determineu la taxa efectiva anual equivalent al 14% nominal capitalitzable bimestralment.

RAONAMENT

$C_0 \xrightarrow{\quad\quad\quad} \dots \xrightarrow{\quad\quad\quad} C$

$1 \text{ any} = x \text{ períodes} = y \text{ períodes}$

$1 \xrightarrow{\quad\quad\quad} (1+i)^x$
 $1 \xrightarrow{\quad\quad\quad} (1+i)^y$
 $1+i$

$1+i = (1+i_x)^x = (1+i_y)^y$

$i_x = \sqrt[x]{(1+i_y)^y} - 1$

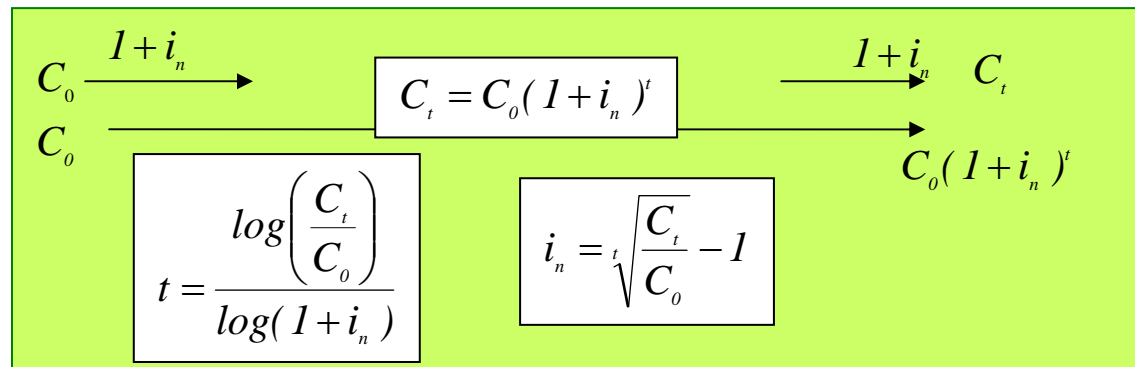
$\left\{ \begin{array}{l} n = 6 \text{ bimestres} \\ J = 14\% \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_6 = \frac{14}{6} = 2'3333\% \\ i_6 = 0'02333 \end{array} \right. \Rightarrow (1+i)^t = (1+i_6)^6$

$$\Rightarrow i = 1'02333^6 - 1 = 0'1484 \Rightarrow \boxed{I = 14'84\%}$$

2.14

Calculeu el muntant obtingut al invertir durant 6 anys 360.607 € al 7% d'interès nominal compost amb freqüència trimestral.

RAONAMENT



$$\left\{ \begin{array}{l} n = 4 \text{ trimestres} \\ t = 24 \text{ trimestres} \\ C_0 = 360.607 \text{€} \\ j = 7\% \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_4 = \frac{7}{4} = 1'75\% \\ i_4 = 0'0175 \end{array} \right. \Rightarrow C_{24} = 360.607(1'0175)^{24}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{24} = 546.839'88\text{€}}$$

2.15

Trobeu el muntant produït per 336.567 € al 8% d'interès compost anual durant 6 anys i 45 dies.

RAONAMENT

$C_0 \xrightarrow{1+i_n} C_t = C_0(1+i_n)^t \xrightarrow{1+i_n} C_t$
 $C_0 \xrightarrow{\quad\quad\quad} C_0(1+i_n)^t$

$$t = \frac{\log\left(\frac{C_t}{C_0}\right)}{\log(1+i_n)}$$

$$i_n = \sqrt[t]{\frac{C_t}{C_0}} - 1$$

$\left\{ \begin{array}{l} n = 1 \text{ any} \\ t = 6'125 \text{ anys} \\ C_0 = 336.567\text{€} \\ I = 8\% \end{array} \right. \Rightarrow i = 0'08 \Rightarrow C_t = 336.567(1'08)^{6'125} \Rightarrow$
 $\Rightarrow C_t = 539.252'33\text{€}$

2.16

Calculeu la taxa d'interès compost trimestral si 102.172 € durant 3 anys produeixen un muntant de 127.686 €

RAONAMENT

$C_0 \xrightarrow{1+i_n} C_t = C_0(1+i_n)^t \xrightarrow{1+i_n} C_t$
 $C_0 \xrightarrow{\quad\quad\quad} C_0(1+i_n)^t$

$$t = \frac{\log\left(\frac{C_t}{C_0}\right)}{\log(1+i_n)}$$

$$i_n = \sqrt[t]{\frac{C_t}{C_0}} - 1$$

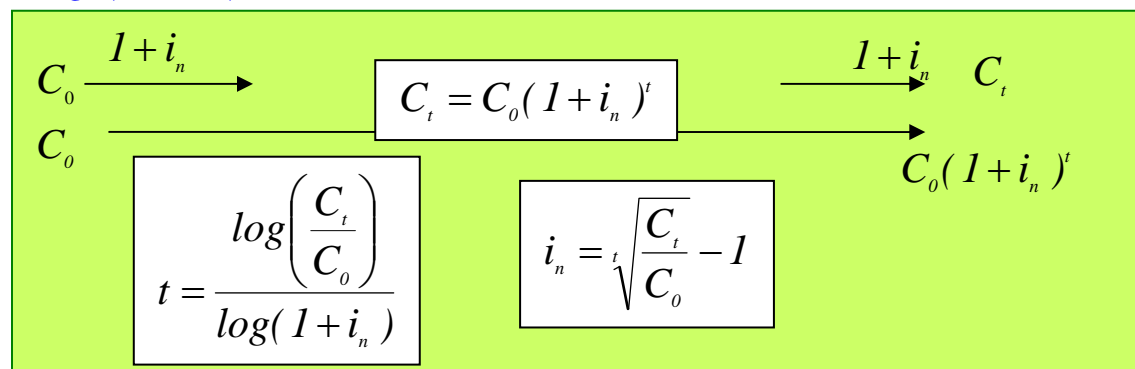
$\left\{ \begin{array}{l} n = 4 \text{ trimestres} \\ t = 12 \text{ trimestres} \\ C_0 = 102.172\text{€} \\ C_{12} = 127.686\text{€} \end{array} \right. \Rightarrow C_t = C_0(1+i_n)^t \Rightarrow i_4 = \sqrt[12]{\frac{127.686}{102.172}} - 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_4 = 0'0187 \\ I_4 = 1'87\% \end{cases}$$

2.17

Quant de temps triga un capital, a interès compost, en duplicar-se invertit al 5% anual.

RAONAMENT



$$\begin{cases} n = 1 \text{ any} \\ C_t = 2C_0 \Rightarrow 2C_0 = C_0(1'05)^t \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1'05} = 14'2066 \text{ anys} \\ I = 5\% \end{cases}$$

$$t = 14 \text{ anys, } 2 \text{ mesos, } 14 \text{ dies}$$

2.18

S'ingressen 1800€ al 5% d'interès compost anua durant 8 anys. Quina quantitat s'hauria d'invertir a interès simple anual del 5% per obtenir en el mateix temps el mateix interès.

RAONAMENT

$C_0 \longrightarrow \dots \longrightarrow C$
 $C_t = C_0(1+i_n)^t$
 $C_t = C_0(1+t \cdot i_n)$

$$\begin{cases} B = 1.800(1'05)^8 - 1.800 \\ B = C_0 \cdot 8 \cdot 0'05 \end{cases} \Rightarrow C_0 = \frac{1.800(1'05)^8 - 1.800}{8 \cdot 0'05} \Rightarrow$$

$\Rightarrow C_0 = 2.148'55\text{€}$

2.19

A quina taxa d'interès compost anual s'han d'invertir 6.500€ per tal que en 6 anys produeixin uns interessos de 1.630'13€?

RAONAMENT

$C_0 \xrightarrow{1+i_n} C_t$
 $C_t = C_0(1+i_n)^t$
 $C_0 \xrightarrow{1+i_n} C_0(1+i_n)^t$

$$t = \frac{\log\left(\frac{C_t}{C_0}\right)}{\log(1+i_n)}$$

$$i_n = \sqrt[t]{\frac{C_t}{C_0}} - 1$$

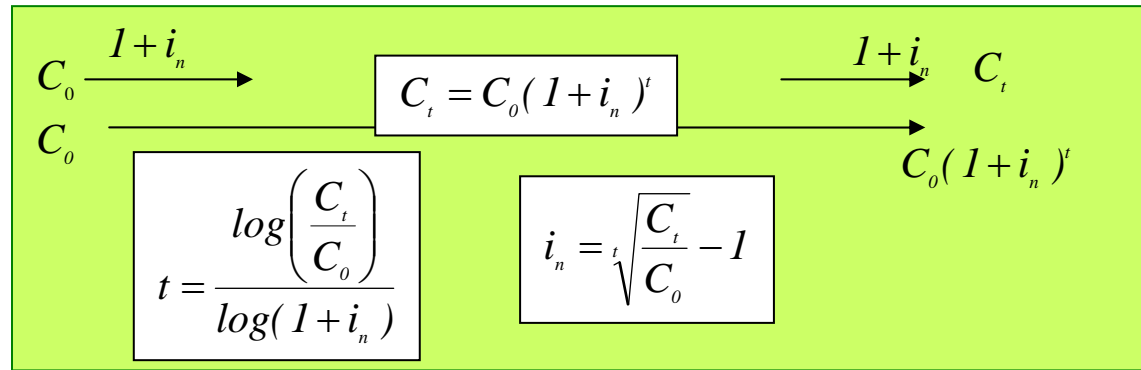
$$\begin{cases} n = 1 \text{ any} \\ t = 6 \text{ anys} \\ C_0 = 6.500\text{€} \\ B = C_6 - C_0 = 1.630'16\text{€} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = 6.500 \\ C_6 = 8.130'16 \end{cases} \Rightarrow i = \sqrt[6]{\frac{8.130'16}{6.500}} - 1$$

$\Rightarrow i = 0'038$
 $I = TAE = 3'8\%$

2.20

Un producte de neteja costa avui 6'5 €. Quin serà el preu d'aquest producte d'aquí a 5 anys si se suposa un increment anual del 2'5%?

RAONAMENT

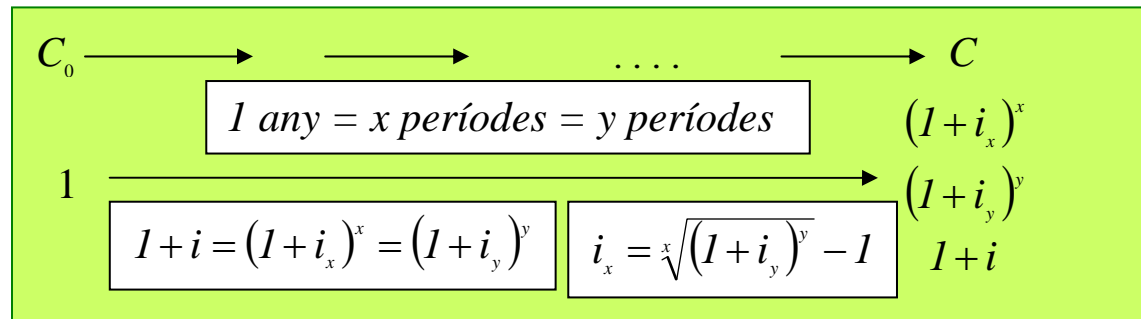


$$\begin{cases} n = 1 \text{ any} \\ t = 5 \text{ anys} \\ C_0 = 6'5\text{€} \\ I = 2'5\% \end{cases} \Rightarrow i = 0'025 \Rightarrow C_5 = 6'5(1'025)^5 \Rightarrow \boxed{C_5 = 7'35\text{€}}$$

2.21

Un compte té un TAE del 4'28%, si es desitja cobrar trimestralment, calculeu l'interès trimestral equivalent.

RAONAMENT



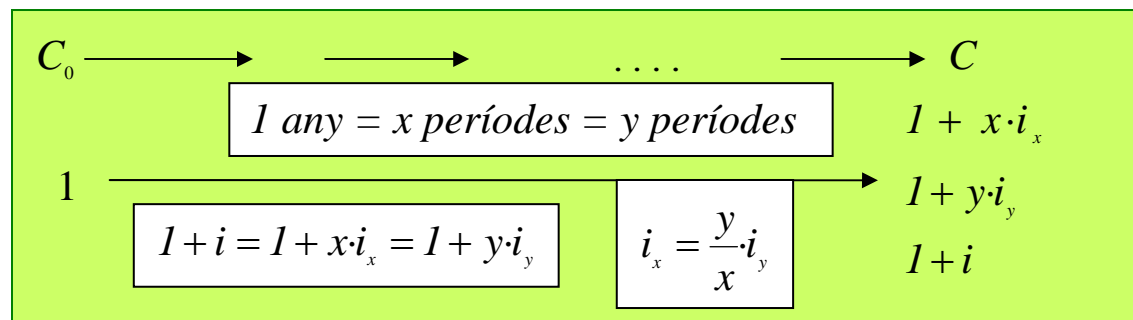
$$\begin{cases} I = 4'28\% \\ i = 0'0428 \end{cases} \Rightarrow (1+i) = (1+i_4)^4 \Rightarrow i_4 = \sqrt[4]{1+i} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_4 = \sqrt[4]{1.0428} - 1 = 0.0105 \\ I_4 = 1.05\% \end{cases}$$

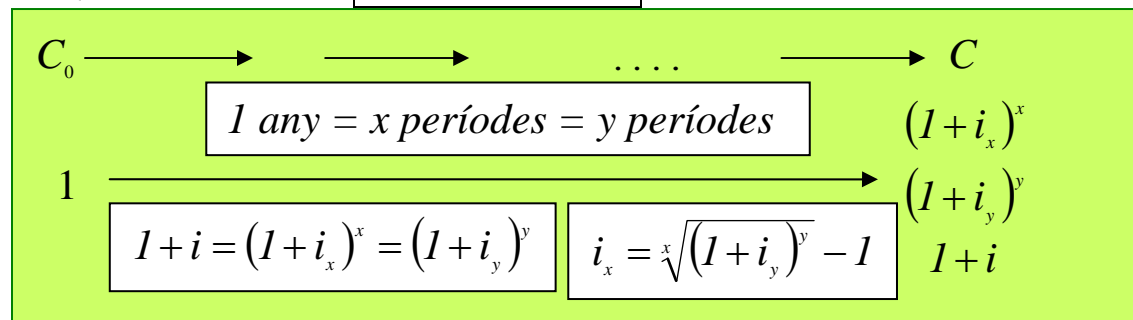
2.22

Calcula el TAE equivalent a un interès del 0.5% mensual : **a)** interès simple, **b)** interès compost.

RAONAMENT



$$a) \begin{cases} I_{12} = 0.5\% \\ i_{12} = 0.005 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 12 \cdot i_{12} = 0.06 \\ I = 6\% \end{cases}$$



$$b) \begin{cases} I_{12} = 0.5\% \\ i_{12} = 0.005 \end{cases} \Rightarrow (1 + i) = (1 + i_{12})^{12} \Rightarrow i = (1 + i_{12})^{12} - 1 \Rightarrow$$

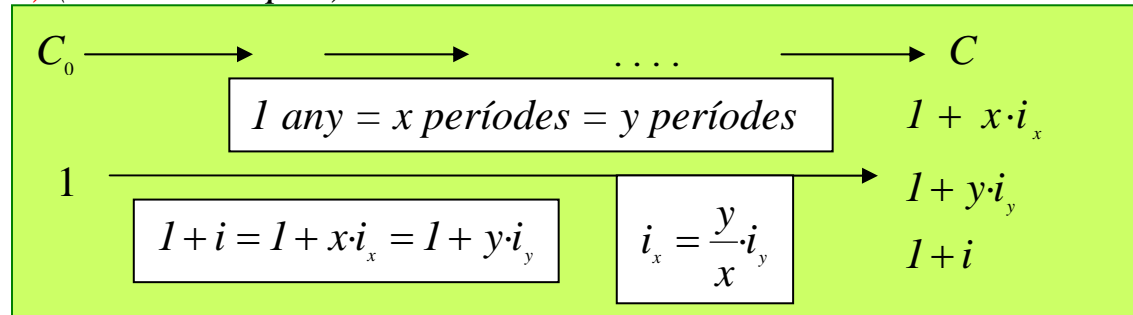
$$\Rightarrow \begin{cases} i = 1.005^{12} - 1 = 0.06167 \\ I = 6.167\% \end{cases}$$

2.23

Calculeu la taxa d'interès trimestral equivalent a una taxa d'interès trimestral del 2'4%. *a)* interès simple, *b)* interès compost.

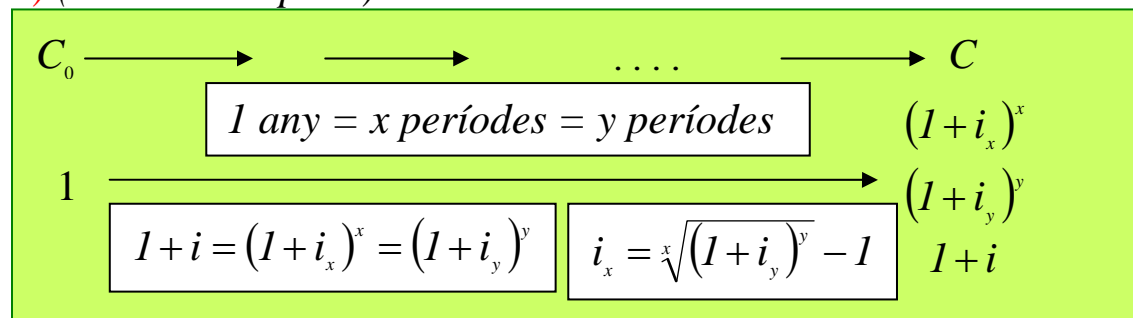
RAONAMENT

a) (interès simple)



$$\begin{cases} I_4 = 2'4\% \\ i_4 = 0'024 \end{cases} \Rightarrow 1 + 4 \cdot i_4 = 1 + 3 \cdot i_3 \Rightarrow \begin{cases} i_3 = \frac{4}{3} \cdot 0'024 = 0'032 \\ I_3 = 3'2\% \end{cases}$$

b) (interès compost)



$$\begin{cases} I_4 = 2'4\% \\ i_4 = 0'024 \end{cases} \Rightarrow (1 + i_3)^3 = (1 + i_4)^4 \Rightarrow i_3 = \sqrt[3]{(1 + i_4)^4} - 1 \Rightarrow$$

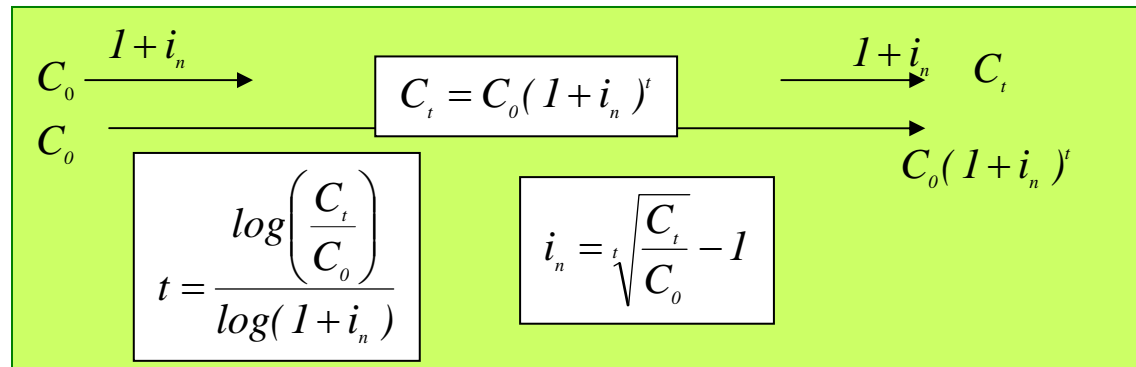
$$\Rightarrow \begin{cases} i_3 = \sqrt[3]{1'024^4} - 1 = 0'032127 \\ I_3 = 3'2127\% \end{cases}$$

2.24

Un client inverteix 600€ a un interès anual nominal del 6% amb

un període de capitalització trimestral i obté uns interessos de 117'06€. Determineu el temps emprat.

RAONAMENT



$$\left\{ \begin{array}{l} n = 3 \text{ trimestres} \\ C_0 = 600\text{€} \\ J = 6\% \\ B = C_t - C_0 = 117'06\text{€} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_3 = \frac{J}{3} = 2\% \\ i_3 = 0'02 \\ C_t = 717'06\text{€} \end{array} \right. \Rightarrow C_t = C_0(1+i_n)^t$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log\left(\frac{C_t}{C_0}\right)}{\log(1+i_n)} \Rightarrow t = \frac{\log\left(\frac{717'06}{600}\right)}{\log(1'02)} = 9 \text{ trimestres} \Rightarrow$$

$t = 3 \text{ anys}$

2.25

Calculeu el capital inicial que s'ha d'invertir durant 5 anys, amb un nominal, convertible trimestralment del 4'2% perquè produeixi un capital de 4.621'23€.

RAONAMENT

$$C_0 \xrightarrow{1+i_n} \boxed{C_t = C_0(1+i_n)^t} \xrightarrow{1+i_n} C_t$$

$$C_0 \xrightarrow{\hspace{10em}} C_0(1+i_n)^t$$

$$t = \frac{\log\left(\frac{C_t}{C_0}\right)}{\log(1+i_n)}$$

$$i_n = \sqrt[t]{\frac{C_t}{C_0}} - 1$$

$\left\{ \begin{array}{l} n = 4 \text{ trimestres} \\ t = 20 \text{ trimestres} \\ J = 4'2\% \\ C_{20} = 4.621'23\text{€} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_4 = \frac{J}{4} = 1'05\% \\ i_4 = 0'0105 \end{array} \right. \Rightarrow C_0 = \frac{C_{20}}{(1+i_4)^{20}}$

$\Rightarrow C_0 = \frac{4.621'23}{(1'0105)^{20}} = 3.750 \Rightarrow \boxed{C_0 = 3.750\text{€}}$

2.26

Calculeu el TAE de les taxes nominals següents: **a)** 7% amb període mensual, **b)** 6'3% amb període semestral, **c)** 7'2% amb període quadrimestral.

RAONAMENT

$$C_0 \xrightarrow{\hspace{10em}} \dots \xrightarrow{\hspace{10em}} C$$

$1 \text{ any} = x \text{ períodes} = y \text{ períodes}$

$(1+i_x)^x$

$1+i = (1+i_x)^x = (1+i_y)^y$

$i_x = \sqrt[x]{(1+i_y)^y} - 1$

$(1+i_y)^y$
 $1+i$

a) $\left\{ \begin{array}{l} n = 12 \\ J = 7\% \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_{12} = \frac{j}{12} = 0'5833 \\ i_{12} = 0'005833 \end{array} \right. \Rightarrow 1+i = (1+i_{12})^{12} \Rightarrow$

$$\begin{cases} i = 1'005833^{12} - 1 \\ I = 100i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 0'07228 \\ I = 7'228\% \end{cases}$$

b) $\begin{cases} n = 2 \\ J = 6'3\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{12} = \frac{J}{2} = 3'15\% \\ i_2 = 0'0315 \end{cases} \Rightarrow 1+i = (1+i_2)^2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} i = 1'0315^2 - 1 \\ I = 100i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 0'064 \\ I = 6'4\% \end{cases}$$

c) $\begin{cases} n = 3 \\ J = 7'2\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_3 = \frac{J}{3} = 2'4\% \\ i_3 = 0'024 \end{cases} \Rightarrow 1+i = (1+i_3)^3 \Rightarrow$

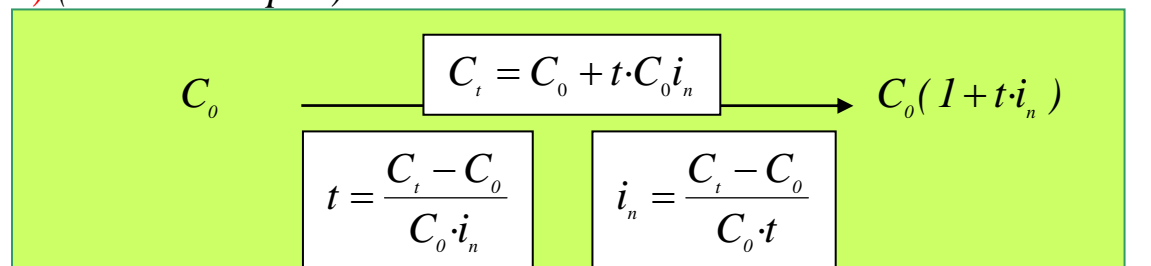
$$\begin{cases} i = 1'024^3 - 1 \\ I = 100i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 0'07374 \\ I = 7'374\% \end{cases}$$

2.27

Ingressem 5000€ en una llibreta a termini durant 4 anys amb una capitalització mensual . Si es transformen en 6056'03€, quin és el interès efectiu anual (TAE) d'aquesta operació? **a)** interès simple, **b)** interès compost.

RAONAMENT

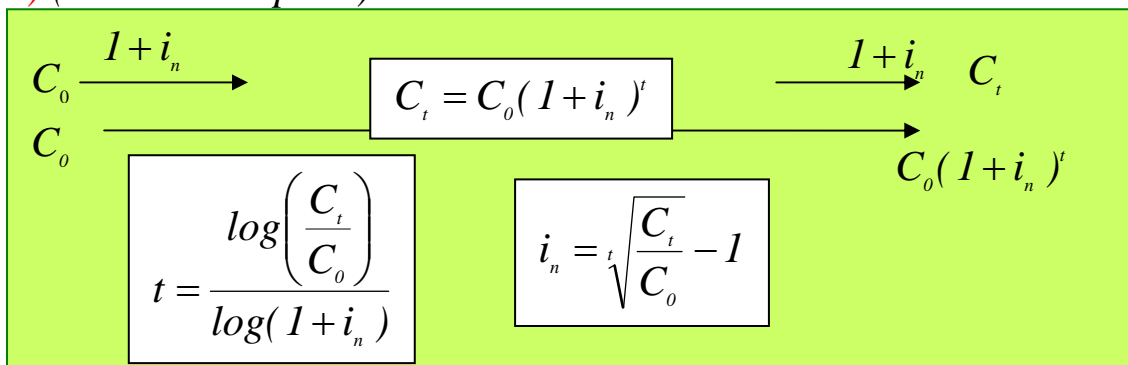
a) (interès simple)



$$\begin{cases} n = 12 \text{ mesos} \\ t = 48 \text{ mesos} \\ C_0 = 5.000\text{€} \\ C_{48} = 6.056'03 \end{cases} \Rightarrow C_{48} = C_0(1 + t \cdot i_{12}) \Rightarrow i_{12} = \frac{C_{48} - C_0}{C_0 \cdot t} = \frac{1.056'03}{5.000 \cdot 48}$$

$$\Rightarrow i_{12} = 0'0044 \Rightarrow \begin{cases} i = 12i_{12} = 0'0528 \\ I = 5'28\% \end{cases}$$

b) (interès compost)



$$\begin{cases} n = 12 \text{ mesos} \\ t = 48 \text{ mesos} \\ C_0 = 5.000\text{€} \\ C_{48} = 6.056'03 \end{cases} \Rightarrow C_{48} = C_0(1 + i_{12})^{48} = C_0(1 + i)^4 \Rightarrow i = \sqrt[4]{\frac{C_{48}}{C_0}} - 1$$

$$\Rightarrow i = \sqrt[4]{\frac{6.056'03}{5.000}} - 1 = 0'049 \Rightarrow \begin{cases} i = 0'049 \\ I = 4'9\% \end{cases}$$

2.28

Una entitat bancària ofereix un producte amb un TAE del 5'46%. Calculeu la taxa d'interès nominal associat al període trimestral.

RAONAMENT

$$C_0 \longrightarrow \longrightarrow \dots \longrightarrow C$$

$1 \text{ any} = x \text{ períodes} = y \text{ períodes}$

 $(1+i_x)^x$
 $1 \longrightarrow (1+i_y)^y$

$1+i = (1+i_x)^x = (1+i_y)^y$

$i_x = \sqrt[x]{(1+i_y)^y} - 1$

 $1+i$

$$\begin{cases} n = 4 \text{ trimestres} \\ t = 1 \text{ any} \\ I = 5'46\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 0'0546 \\ (1+i_4)^4 = 1+i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_4 = \sqrt[4]{1+i} - 1 \\ I_4 = 100i_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_4 = 0'01338 \\ I_4 = 1'338 \end{cases}$$

$\Rightarrow J = 4 \cdot I_4 = 5'352\%$

$$C_0 \longrightarrow \longrightarrow \dots \longrightarrow C$$

$1 \text{ any} = x \text{ períodes} = y \text{ períodes}$

 $(1+i_x)^x$
 $1 \longrightarrow (1+i_y)^y$

$1+i = (1+i_x)^x = (1+i_y)^y$

$i_x = \sqrt[x]{(1+i_y)^y} - 1$

 $1+i$

2.29

Un banc ofereix dues possibilitats, la primera un interès nominal del 2'4% capitalitzable mensual i la segona amb un 2'5% nominal capitalitzable semestral. Estudieu les dues opcions.

RAONAMENT

a)

$$\begin{cases} n = 12 \text{ mesos} \\ J = 2'4\% \end{cases} \Rightarrow I_{12} = \frac{J}{12} = 0'2\% \Rightarrow i_{12} = 0'002 \Rightarrow$$

$$i = (1+i_{12})^{12} - 1 = 1'002^{12} - 1 = 0'02426 \Rightarrow$$

$I = 2'426\%$

b)

$$\begin{cases} n = 2 \text{ semestres} \\ J = 2'5\% \end{cases} \Rightarrow I_2 = \frac{J}{2} = 1'25\% \Rightarrow i_2 = 0'0125$$

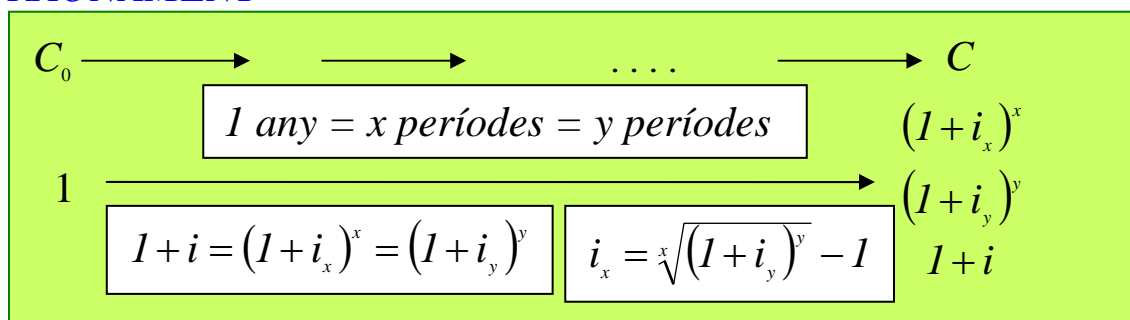
$$i = (1 + i_2)^2 - 1 = 1'0125^2 - 1 = 0'02515 \Rightarrow$$

$$I = 2'515\%$$

2.30

Tenim un compte d'estalvi al 5,75% d'interès anual efectiu. Fins ara el banc ens abonava els interessos a final d'any, però ara nosaltres voldríem que ens abonés els interessos trimestralment. Quin interès trimestral equivalent ens haurà de pagar el banc?

RAONAMENT



$$\begin{cases} I = 5'75\% \\ i = 0'0575 \\ x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow (1 + i_4)^4 = (1 + i) \Rightarrow i_4 = \sqrt[4]{1'0575} - 1 = 0'014$$

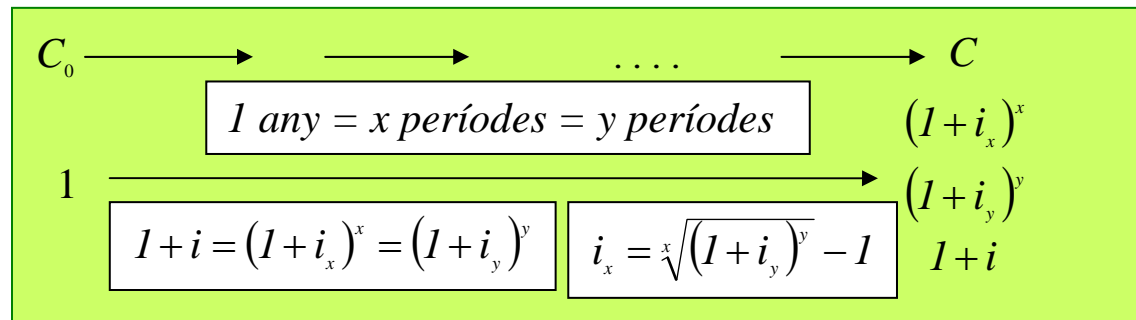
$$\Rightarrow I_4 = 1'4\%$$

2.31

Una caixa d'estalvis ens ofereix un interès del 2,4% nominal anual capitalitzable mensualment, de manera que cada mes ens dóna un 0,2% del capital dipositat. Quina és la taxa anual

equivalent (TAE) d'aquesta operació?

RAONAMENT



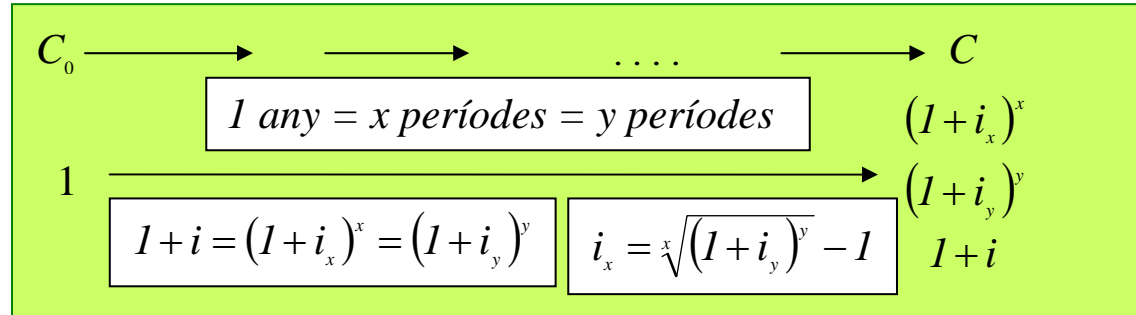
$$\begin{cases} n = 12 \\ J = 2'4\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{12} = \frac{J}{12} = 0'2\% \\ i_{12} = 0'002 \end{cases} \Rightarrow i = (1+i_{12})^{12} - 1$$

$$\Rightarrow i = 1'002^{12} - 1 = 0'02426 \Rightarrow \boxed{I = 2'426\%}$$

2.32

Teniu un capital en un compte bancari i cada quatre mesos us abonem uns interessos del 2%. Quina és la TAE d'aquest compte bancari?

RAONAMENT



$$\begin{cases} n = 3 \\ I_3 = 2\% \end{cases} \Rightarrow i_3 = 0'02 \Rightarrow i = (1+i_3)^3 - 1 = 1'02^3 - 1 = 0'0612$$

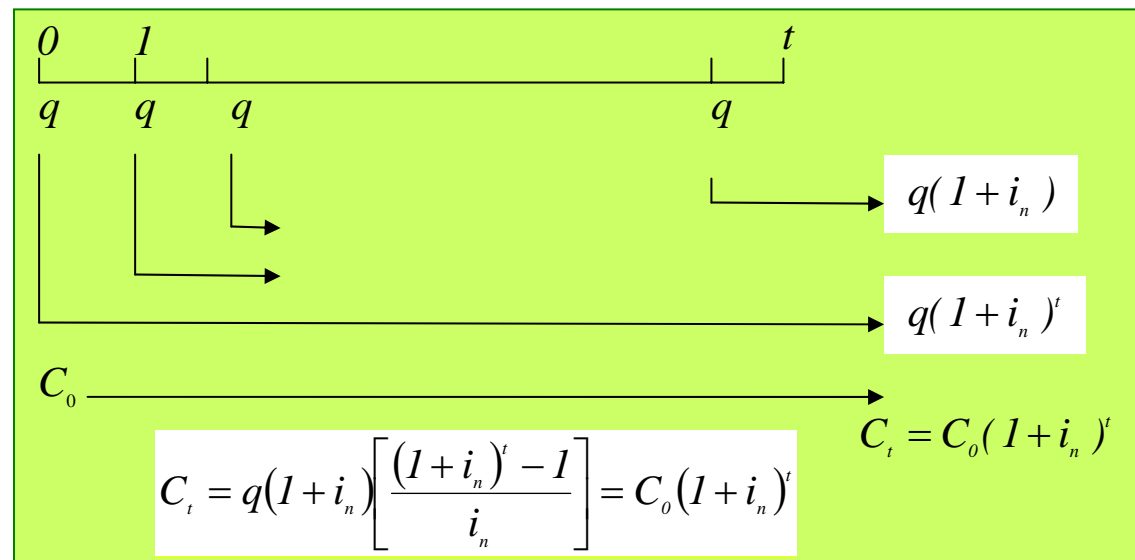
$$\Rightarrow \boxed{I = 6'12\%}$$

3.-RENDES DE CAPITALITZACIÓ I D'AMORTITZACIÓ

3.1

Una persona vol comprar-se un cotxe dintre de 4 anys, vol ingressar unes quotes trimestrals constants a un TAE o interès efectiu del 4'8% per aconseguir els 27.500€ que creu necessaris. Calculeu la quota.

RAONAMENT



$$\begin{cases} n = 4 \text{ trimestres} \\ t = 16 \text{ trimestres} \\ C_t = 27.500 \\ I = 4'8\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 0'048 \\ i_4 = \sqrt[4]{1+i} - 1 = 0'01179 \end{cases} \Rightarrow$$

$$q = \frac{C_t \cdot i_n}{(1+i_n) \left[(1+i_n)^t - 1 \right]} = \frac{27.500 \cdot 0'01179}{[(1'01179)^{16} - 1] \cdot 1'01179} \Rightarrow$$

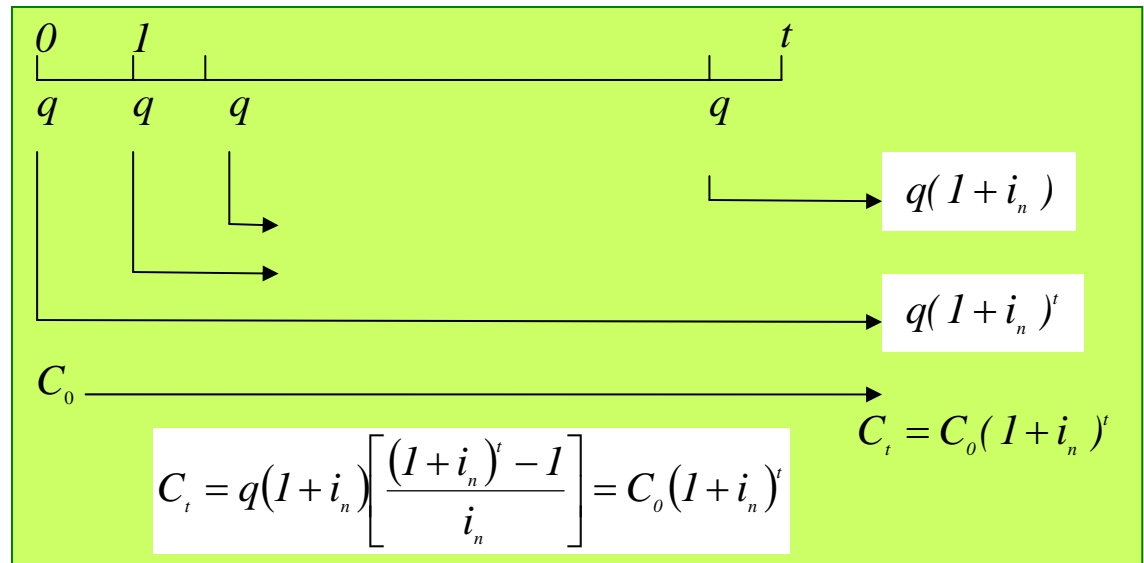
$$\boxed{q = 1.553'5\text{€}}$$

3.2

S'estableix un pla de pensions de la següent manera: l'1 de gener

de cada any ingressa 3.600€ al 4'5% anual. Quin capital haurà acumulat dintre de 35 anys.

RAONAMENT



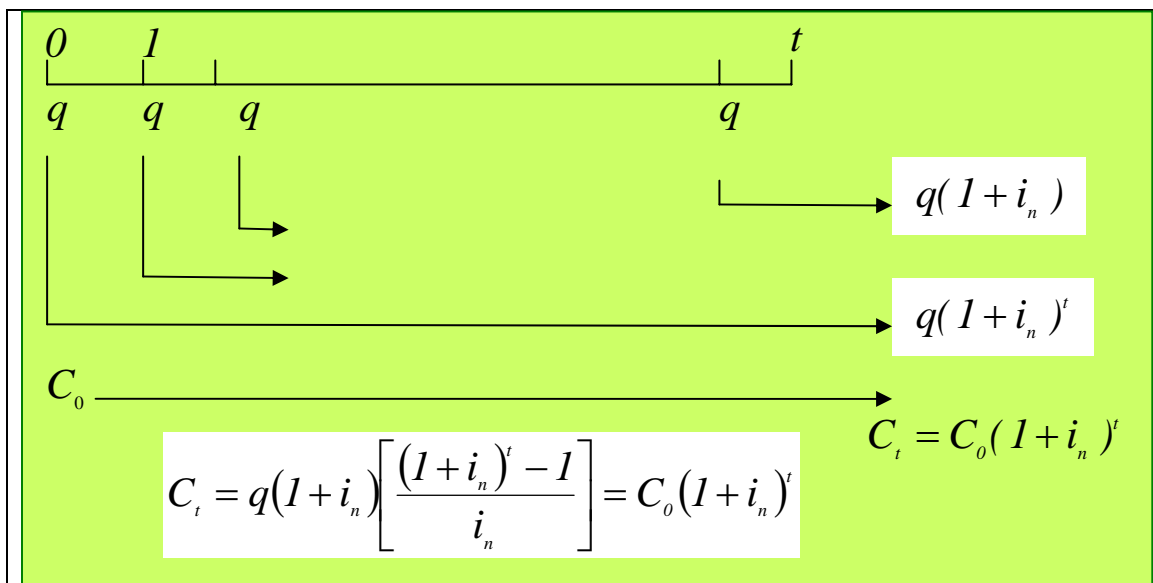
$$\left\{ \begin{array}{l} n = 1 \text{ any} \\ t = 35 \text{ anys} \\ q = 3.600\text{€} \\ I = 4'5\% \end{array} \right. \Rightarrow i = 0'045 \Rightarrow C_t = q(1+i_n) \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i_n} \right] \Rightarrow$$

$$C_{35} = 3.600 \cdot 1'045 \left(\frac{1'045^{35} - 1}{0'045} \right) \quad \boxed{C_{35} = 306.590'28\text{€}}$$

3.3

Un comerciant inicia un pla d'estalvis amb un TAE del 10%, ingressant al principi de cada mes 150€. Calculeu el capital acumulat al cap de 20 anys.

RAONAMENT



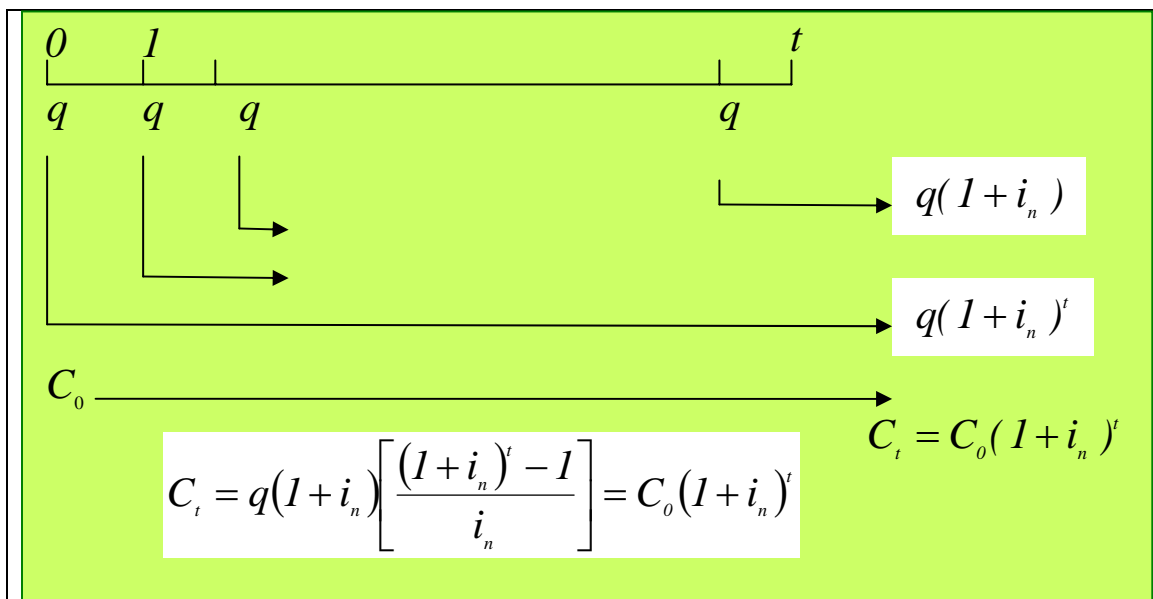
$$\begin{cases} n = 12 \text{mesos} \\ t = 240 \text{mesos} \\ q = 150 \text{€} \\ I = 10\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 0'1 \\ i_{12} = \sqrt[12]{1'1} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_{12} = 0'00797 \\ C_t = q(1+i_n) \left[\frac{(1+i_n)^t - 1}{i_n} \right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_{240} = 150 \cdot 0'00797 \cdot \frac{1'00797^{240} - 1}{0'00797} \Rightarrow \boxed{C_{240} = 108.528'22 \text{€}}$$

3.4

Un treballador té 39 anys i decideix jubilar-se als 60 anys. Decideix fer un pla de pensions amb quotes anuals amb un TAE del 6'5% a partir dels 40 anys. Si vol acumular un capital de 270.000€, calculeu: **a)** valor de la quota. **b)** capital aportat. **c)** interessos obtinguts.

RAONAMENT



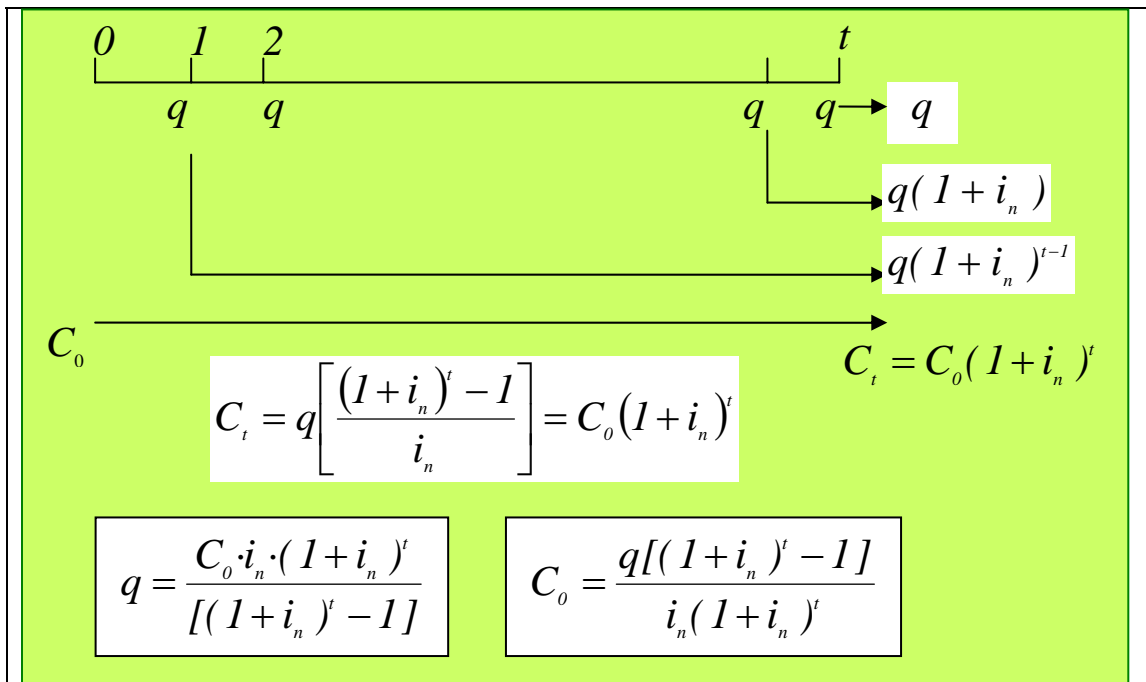
$$\left\{ \begin{array}{l} n = 1 \text{ any} \\ t = 20 \text{ anys} \\ C_{20} = 270.000 \text{ €} \\ I = 6'5\% \end{array} \right. \Rightarrow i = 0'065 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q = \frac{C_t \cdot i_n}{(1+i_n)[(1+i_n)^t - 1]} \\ A = 20q \\ B = C_{20} - A \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q = \frac{270.000 \cdot 0'065}{1'065 \cdot 2'5236} = 6530 \text{ €} \\ A = 130.600 \text{ €} \\ B = 139.400 \text{ €} \end{array} \right.$$

3.5

Un cotxe es paga durant 4 anys, amb les condicions següents: una entrada de 2.500€ i unes quotes trimestrals de 457'50 € amb un interès nominal trimestral del 10'8%. Quin és el preu del cotxe?.

RAONAMENT



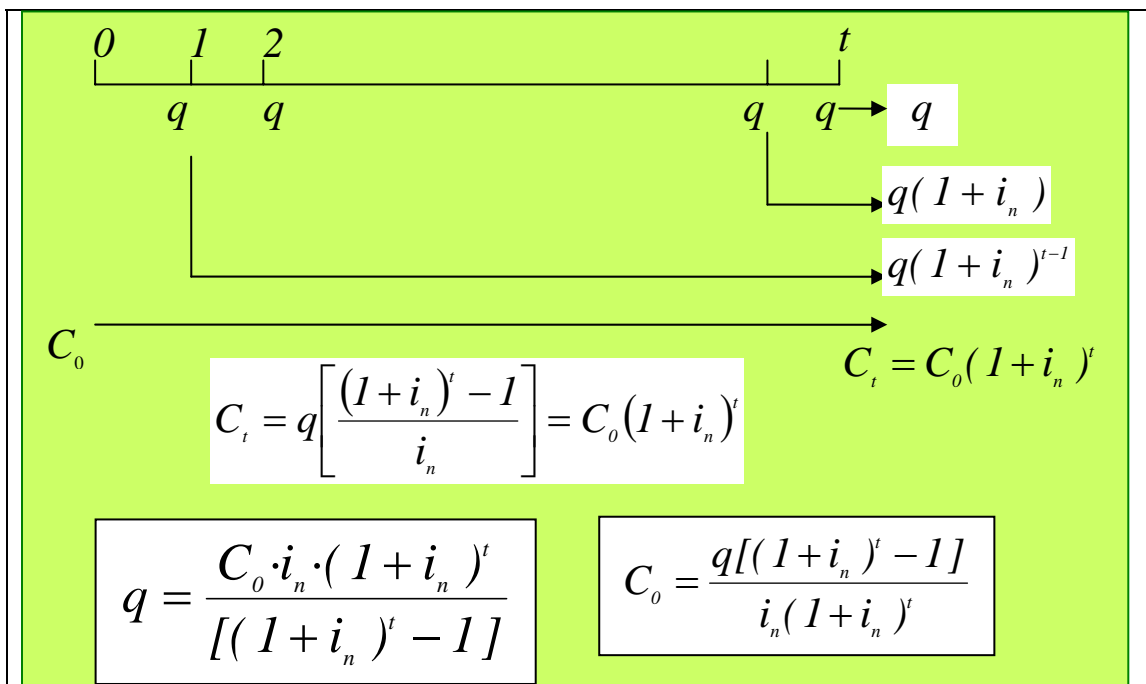
$$\begin{cases} n = 4 \text{ trimestres} \\ t = 16 \text{ trimestres} \\ q = 457'5 \\ J = 10'8\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_4 = \frac{J}{4} = 2'7 \\ i_4 = 0'027 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = \frac{q[(1+i_n)^t - 1]}{i_n(1+i_n)^t} \\ C = 2.500 + C_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_0 = \frac{457'5[1'027^{16} - 1]}{0'027 \cdot 1'027^{16}} = 5.880'74 \\ C = 8.380'74 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C = 8.380'74\text{€}}$$

3.6

Un equip de música professional que costa 3.574'50 € es paga en 11 quotes trimestrals amb un interès nominal trimestral del 9'3%. Calcula la quota i la quantitat total que haurem pagat per l'equip.

RAONAMENT



$$\begin{cases} n = 4 \text{ trimestres} \\ t = 11 \text{ trimestres} \\ C_0 = 3.574'5\text{€} \\ I = 9'3\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 0'093 \\ i_4 = \sqrt[4]{1'093} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_4 = 0'02248 \\ q = \frac{C_0 \cdot i_n \cdot (1+i_n)^t}{[(1+i_n)^t - 1]} \\ C_t = q \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i_n} \right] \end{cases}$$

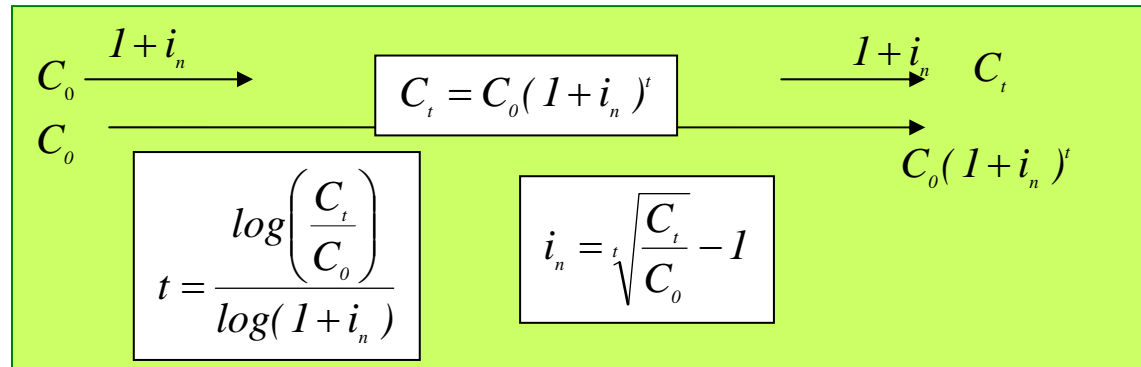
$$\Rightarrow \begin{cases} q = \frac{3.574'5 \cdot 0'02248 \cdot 1'02248^{11}}{1'02248^{11} - 1} = 372\text{€} \\ C_t = 372 \cdot \frac{1'02248^{11} - 1}{0'02248} = 4.092\text{€} \end{cases}$$

3.7

No recordo quant de temps fa que vaig posar 10.000 €. al banc a un interès compost anual que ara tampoc puc recordar. Aquest matí he anat al banc i m'han dit que si ara retirés els diners em donarien 13.310 €, però que si espero 2 anys me'n donaran

16.105,10 €. Calculeu l'interès anual que em paga el banc i els anys que fa que hi tinc els diners. Digueu també quin interès mensual equivalent m'hauria de pagar el banc a partir d'ara si demano que m'abonin els interessos cada mes.

RAONAMENT

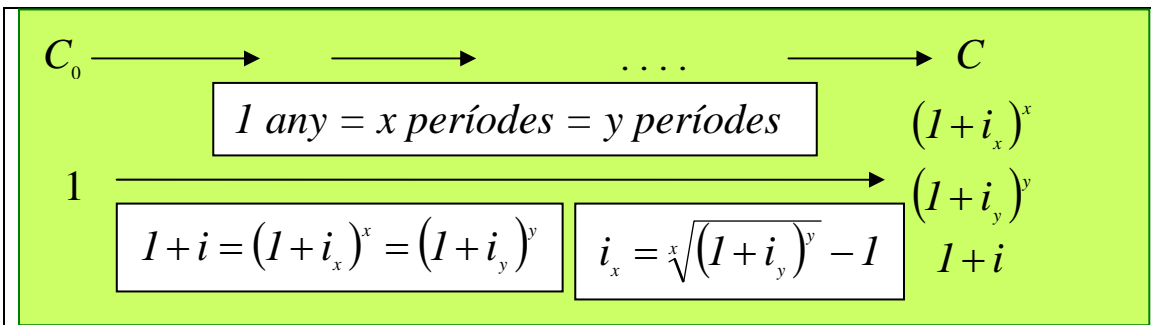


$\begin{cases} n = 1 \text{ any} \\ C_0 = 10.000\text{€} \\ C_t = 13.310\text{€} \\ C_{t+2} = 16.105'2\text{€} \end{cases}$	\Rightarrow	$\begin{cases} i = \sqrt[2]{\frac{16.105'2}{13.310}} - 1 = 0'1 \\ t = \frac{\log\left(\frac{13.310}{10.000}\right)}{\log 1'1} = 3 \text{ anys} \\ i_{12} = \sqrt[12]{1'1} - 1 = 0'007974 \end{cases}$	\Rightarrow	$\begin{cases} i = 0'1 \\ I = 10\% \\ I_4 = 0'7974\% \end{cases}$
---	---------------	---	---------------	---

3.8

En un banc ofereixen dues possibilitats als seus clients per cobrar els interessos. La primera consisteix en un 2,25% anual nominal que s'ingressa mensualment. L'altra possibilitat és un 2,4% nominal abonats trimestralment. Quina de les dues opcions és més avantatjosa per al client?

RAONAMENT



a) $\begin{cases} n = 12 \text{ mesos} \\ J = 2'25\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{12} = \frac{J}{12} = 0'1875 \\ i_{12} = 0'001875 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 1'001875^{12} - 1 \\ I = 100 \cdot i \end{cases} \Rightarrow$

$i = 0'02273$
 $I = 2'273\%$

b) $\begin{cases} n = 4 \text{ trimestres} \\ J = 2'4\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_4 = \frac{J}{4} = 0'6 \\ i_4 = 0'006 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 1'006^4 - 1 \\ I = 100 \cdot i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 0'02421 \\ I = 2'421\% \end{cases}$

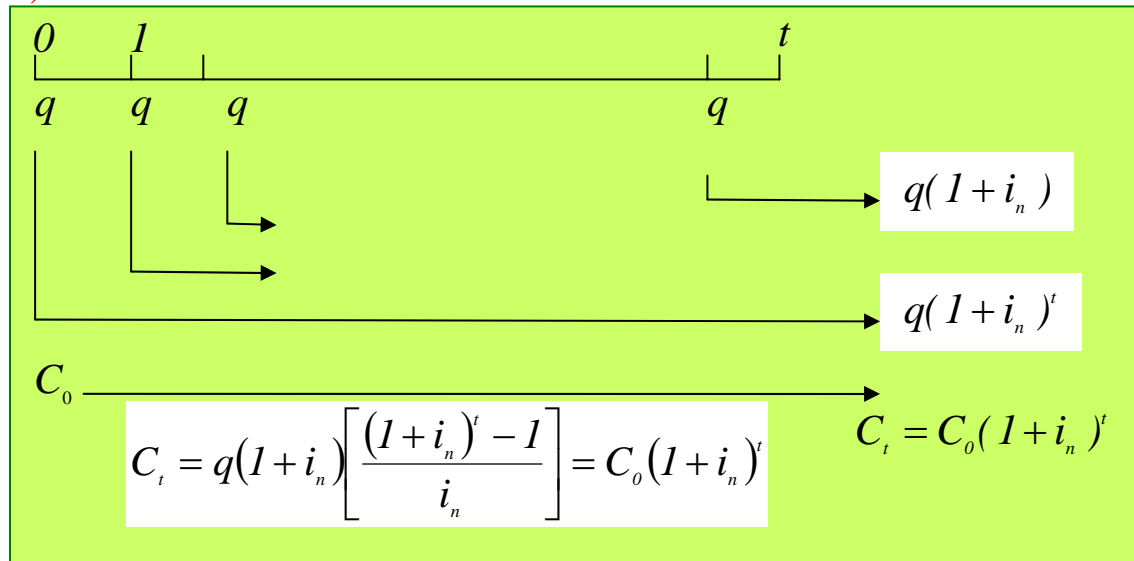
és millor la segona oferta.

3.9

Una persona va obrir un compte d'estalvi el dia 1 de gener de 1.994 al interès compost del 0,3 mensual. Va fer una imposició inicial de 600 €. Des de llavors va anar ingressant 600 € en aquest compte el dia 1 de cada mes. El dia 1 de gener de 1.996 ja no va ingressar les 600 €, sinó que va treure tot el capital que tenia al compte. Amb el que va treure i un préstec que li va concedir el mateix banc aquell dia, es va comprar un cotxe de 23.000 €. El import del préstec va ser justament la quantitat que li mancava per arribar al preu del cotxe. El préstec era de l'1% mensual, i s'havia de tornar en 18 mensualitats del mateix import, la primera de les quals s'havia de pagar l'1 de febrer de 1.996. Calculeu el import de les mensualitats.

RAONAMENT

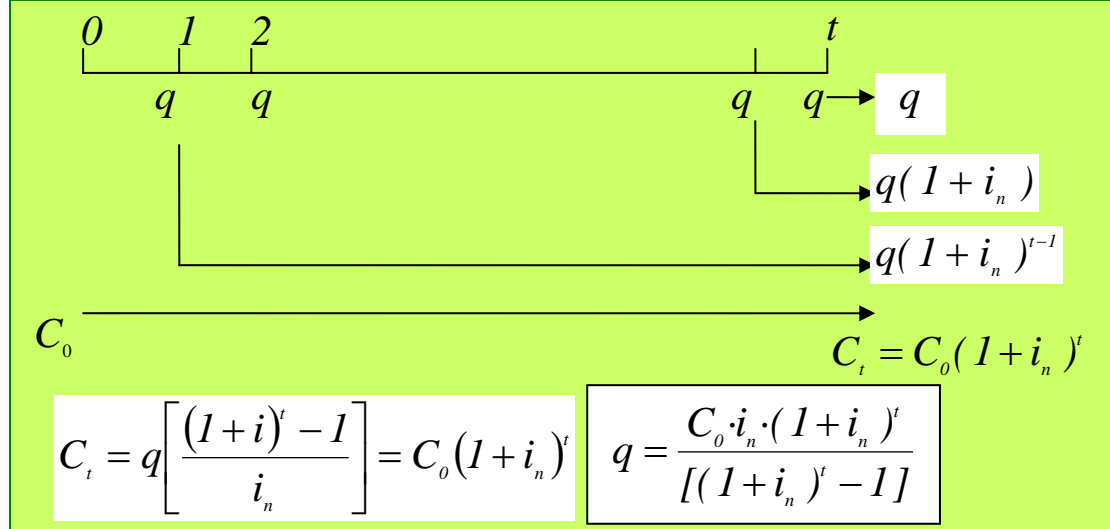
a)



$$\begin{cases} n = 12 \text{mesos} \\ t = 24 \text{mesos} \\ q = 600\text{€} \\ I_{12} = 0'3\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_{12} = 0'003 \\ C_{24} = q(1+i_n) \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i_n} \right] \Rightarrow \end{cases}$$

$$C_{24} = 600 \cdot 0'003 \cdot \frac{1'003^{24} - 1}{0'003} = 14952\text{€}$$

b)



$$C_0 = 23.000 - 14.952'63 = 8.048\text{€}$$

$$\begin{cases} n = 12 \\ t = 18 \\ I_{12} = 1\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_{12} = 0'01 \\ q = \frac{C_0 \cdot i_n \cdot (1+i_n)^t}{[(1+i_n)^t - 1]} = \frac{8.048 \cdot 0'01 \cdot 1'01^{18}}{1'01^{18} - 1} = 491\text{€} \end{cases}$$

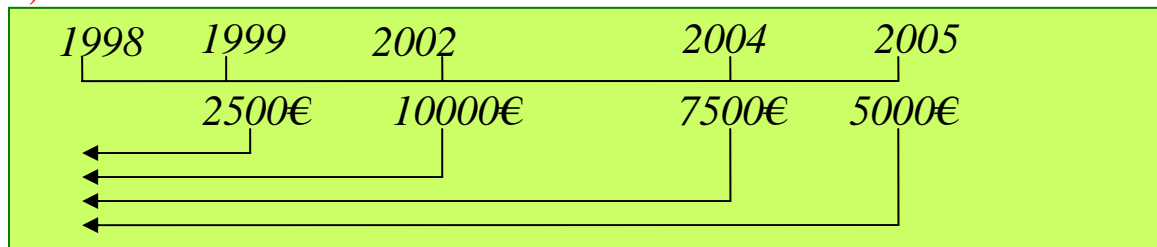
3.10

Una empresa ha de pagar a un proveïdor 2.500 € el 10 de juny de 1999, 10.000 € el 10 de juny de 2002, 7.500 € el 10 de juny de 2004 i 5.000 € el 10 de juny de 2005. El tipus d'interès anual compost efectiu és del 6%.

- a) Quant hauria de pagar per eixugar el deute en un pagament únic el 10 de juny de 1998?
- b) Quin és l'interès mensual equivalent al 6% anual?
- c) Quant haurà de pagar per eixugar el deute en 36 pagaments mensuals del mateix import, el primer dels quals seria el 10 de juliol de 1998 i l'últim el 10 de juny del 2001? (Taxa anual equivalent = 6%.)

RAONAMENT

a)



$$\{n = 1 \text{ any} \quad I = 6\% \quad i = 0'06\}$$

$$C_{1998} = 2.500 \cdot 1'06^{-1} + 10.000 \cdot 1'06^{-4} + 7.500 \cdot 1'06^{-6} + 5.000 \cdot 1'06^{-7}$$

$$C_{1998} = 18.892\text{€}$$

b)

$$I = 6\% \quad i = 0'06 \quad i_{12} = \sqrt[12]{1'06} = 0'004867 \quad I_{12} = 0'4867\%$$

c)

$$\{n = 12 \text{ mesos} \quad t = 36 \text{ mesos} \quad I = 6\% \quad C_{1998} = 18.892\text{€}\}$$

$$q = \frac{C_0 \cdot i_n \cdot (1+i_n)^t}{[(1+i_n)^t - 1]}$$

$$C_t = C_0(1+i_n)^t$$

$$\{n = 12 \text{ mesos} \quad t = 36 \text{ mesos} \quad I = 6\% \quad C_{1998} = 18.892\text{€}\}$$

$$q = \frac{C_0 \cdot i_n \cdot (1+i_n)^t}{[(1+i_n)^t - 1]} = \frac{18.892 \cdot 0.004867 \cdot 1.004867^{36}}{1.004867^{36} - 1} \quad q = 5.143'46\text{€}$$

3.11

He obert un compte corrent en un banc i he oblidat quin interès anual m'han dit que em donarien. Recordo, però, que m'han comentat que un capital qualsevol C ingressat al banc a aquell interès, al cap de dotze anys a règim compost s'hauria duplicat.

a) Quin interès compost anual em paguen? **b)** Quin seria l'interès mensual equivalent? **c)** A partir de demà, dia 18 de juny de 1998, penso ingressar 100€ cada mes a l'interès mensual anterior. Quant tindrè el dia 18 de juny de 1999 abans de fer l'ingrés corresponent a aquell dia?

RAONAMENT

$$C_t = C_0(1+i_n)^t$$

$$i_n = \sqrt[t]{\frac{C_t}{C_0}} - 1$$

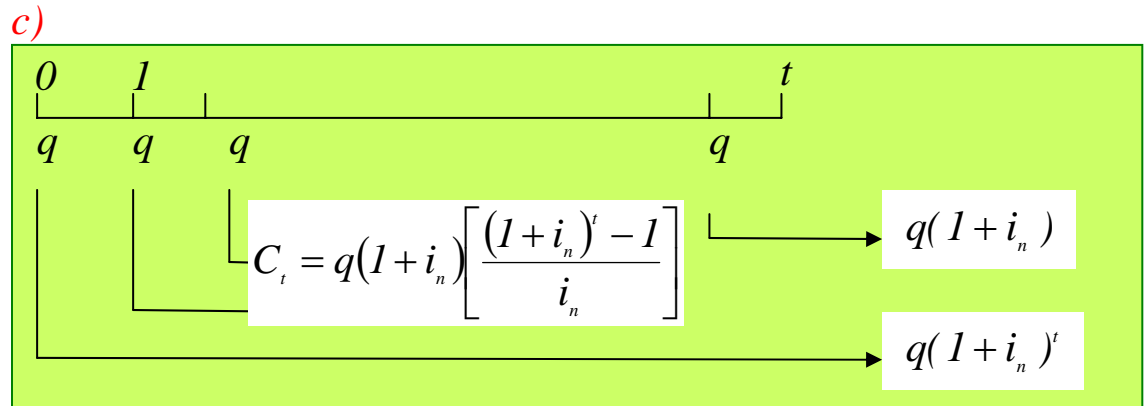
a)

$$\{n = 1 \text{ any} \quad t = 12 \text{ anys} \quad C_0 \quad C_{12} = 2C_0\}$$

$$i_n = \sqrt[t]{\frac{C_t}{C_0}} - 1 = \sqrt[12]{\frac{2}{1}} - 1 \Rightarrow \begin{cases} i = 0'05946 \\ I = 5'946\% \end{cases}$$

b)

$$i = 0'05946 \quad i_{12} = \sqrt[12]{1'05946} - 1 = 0'004825 \quad I_{12} = 0'4825\%$$



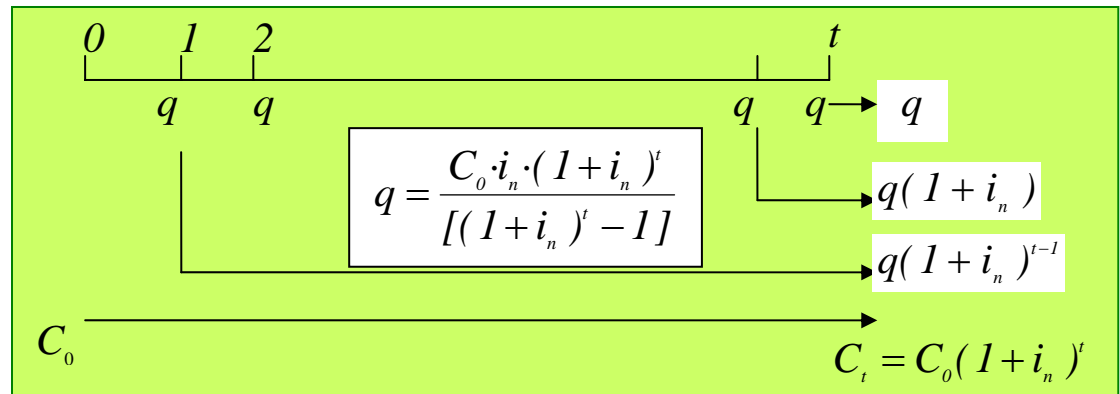
$$\{n = 12 \text{ mesos} \quad t = 12 \text{ mesos} \quad q = 100\text{€} \quad I_{12} = 0'4825\}$$

$$C_{12} = 100(1'004825) \left[\frac{(1'004825)^{12} - 1}{0'004825} \right] \quad \boxed{C_{12} = 1.238'3\text{€}}$$

3.12

Una noia té un préstec de 10.000 € al 7% d'interès compost anual durant 6 anys. Quina anualitat ha de pagar?

RAONAMENT



$$\{C_0 = 10.000\text{€} \quad I = 7\% \quad n = 1 \text{ any} \quad t = 6 \text{ anys}\}$$

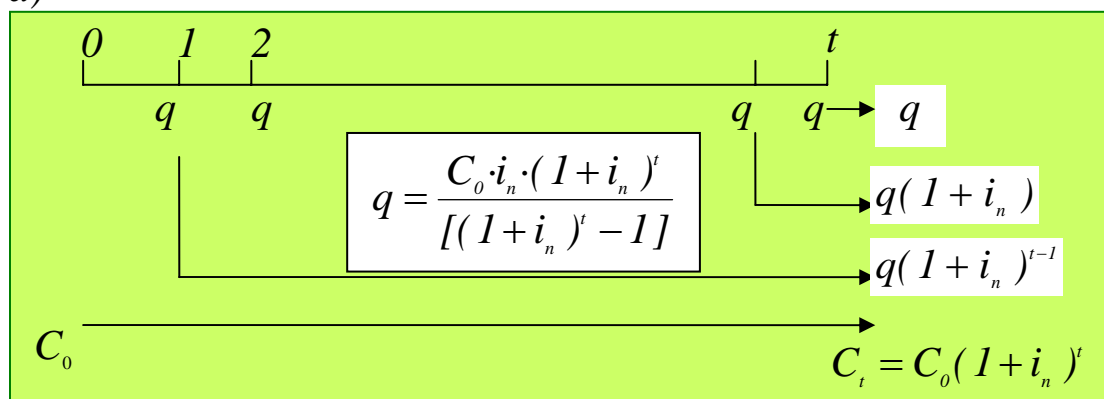
$$q = \frac{C_0 \cdot i_n \cdot (1+i_n)^t}{[(1+i_n)^t - 1]} = \frac{10.000 \cdot 0'07 \cdot 1'07^6}{1'07^6 - 1} \quad \boxed{q = 2098\text{€}}$$

3.13

Una persona vol comprar un cotxe que val 25.000 €. Paga 7.500 € al comptat i finança la resta a quatre anys i a un interès compost del 8% TAE. **a)** Si paga en quotes anuals (la primera al cap d'un any d'haver pagat els 7.500 €, quant ha de pagar cada any? **b)** Quina és la taxa mensual equivalent a una TAE del 8%? **c)** Si paga en quotes mensuals, quant ha de pagar cada mes?

RAONAMENT

a)



a)

$$\{C_0 = 17.500\text{€} \quad n = 1\text{any} \quad t = 4\text{anys} \quad I = 8\%\}$$

$$q = \frac{C_0 \cdot i_n \cdot (1+i_n)^t}{[(1+i_n)^t - 1]} = \frac{17.500 \cdot 0'08 \cdot 1'08^4}{1'08^4 - 1} \quad \boxed{q = 5283'52\text{€}}$$

b)

$$i = 0'08 \quad i_{12} = \sqrt[12]{1'08} - 1 = 0'006434 \quad I_{12} = 0'6434\%$$

c)

$$q = \frac{C_0 \cdot i_n \cdot (1 + i_n)^t}{[(1 + i_n)^t - 1]}$$

$$C_t = C_0(1 + i_n)^t$$

$\{C_0 = 17.500\text{€} \quad n = 12\text{any} \quad t = 48\text{anys} \quad I_{12} = 0'6434\%\}$

$$q = \frac{C_0 \cdot i_n \cdot (1 + i_n)^t}{[(1 + i_n)^t - 1]} = \frac{17.500 \cdot 0'006434 \cdot 1'006434^{48}}{1'006434^{48} - 1} \quad \boxed{q = 425\text{€}}$$

3.14

Una persona decideix l'1 de gener de 1.998, amb 55 anys d'edat, fer-se un pla de pensió per poder completar la jubilació que li correspondrà quan faci els seixanta-cinc anys. Al començament de cada any diposita un capital de 4.000 € i l'entitat financera li garanteix un interès compost anual del 6%. Quin capital recuperarà l'1 de gener del 2.008 després d'haver fet l'última imposició l'1 de gener de l'any anterior?

RAONAMENT

$$C_t = q(1 + i_n) \left[\frac{(1 + i)^t - 1}{i_n} \right]$$

$\{q = 4.000\text{€} \quad n = 1\text{any} \quad t = 10\text{anys} \quad I = 6\%\}$

$$C_t = q(1 + i_n) \left[\frac{(1 + i)^t - 1}{i_n} \right] = 4.000 \cdot 1'06 \cdot \frac{1'06^{10} - 1}{0'06} \quad \boxed{C_{10} = 55.886\text{€}}$$

3.15

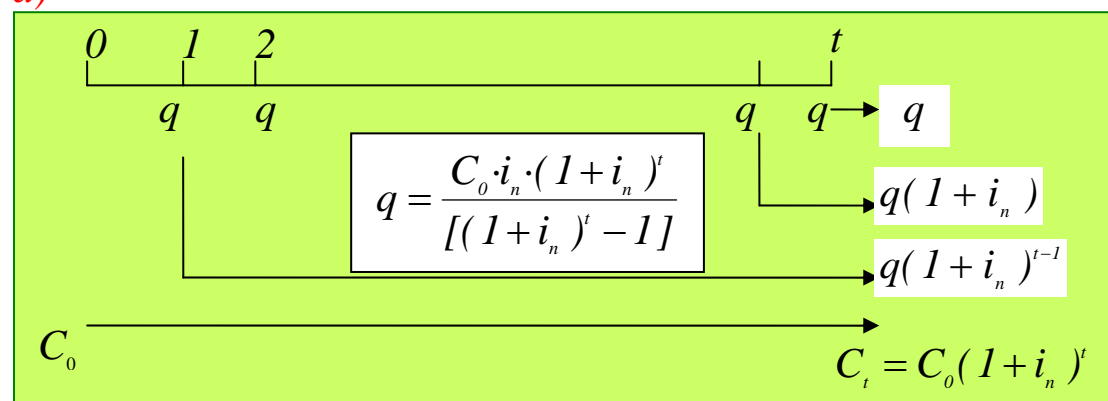
El dia 15 d'abril de 2000 em van deixar 6.000 euros a un interès compost anual del 8%. Haig de tornar aquest préstec en cinc anualitats del mateix import, la primera de les quals l'haig de pagar el 15 d'abril del 2001 i l'última el 15 d'abril del 2005.

a) calculeu l'import q de les anualitats. b) per a cada un dels anys 2001, 2002 i 2003, calculeu la part de l'anualitat que es fa servir per pagar els interessos de l'any i la part que es destina a amortitzar capital. Calculeu el capital total amortitzat després de pagar l'anualitat i el capital pendent en aquell moment. Tot això ho podeu expressar omplint en el vostre quadern de respostes un quadre com el següent:

Any	Anualitat	Interessos any	Amortització anual	Capital amortitzat	Capital pendent
2001					
2002					
2003					

RAONAMENT

a)



$$\{C_0 = 6.000\text{€} \quad n = 1\text{any} \quad t = 5\text{anys} \quad I = 8\%\}$$

$$q = \frac{C_0 \cdot i_n \cdot (1+i_n)^t}{[(1+i_n)^t - 1]} = \frac{6.000 \cdot 0'08 \cdot 1'08^5}{1'08^5 - 1} \quad \boxed{1503\text{€}}$$

b)

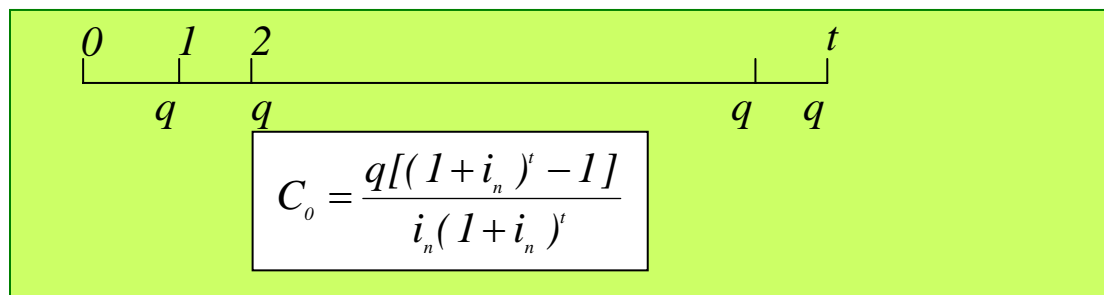
$$\{I_k = C_{k-1} \cdot i_n \quad A_k = q - I_k \quad C_k = C_{k-1} - A_k\} \quad i = 0'08$$

Any	quota q	Interessos $I_k = C_{k-1} \cdot i_n$	Amortització $A_k = q - I_k$	$\sum_1^k A_i$	pendent $C_k = C_{k-1} - A_k$
2000	0	0	0	0	6.000
2001	1.503	480	1023	1023	4977
2002	1.503	398	1105	2128	3872
2003	1.503	309	1194	3322	2678

3.16

Calcula el valor actual d'una renta postpagable de deu períodes anuals de 1000€ cadascun a un interès efectiu del 10%.

RAONAMENT



$$C_0 = \frac{q[(1+i_n)^t - 1]}{i_n(1+i_n)^t}$$

$$C_0 = \frac{q[(1+i_n)^t - 1]}{i_n(1+i_n)^t} = \frac{1.000[1'1^{10} - 1]}{0'1 \cdot 1'1^{10}} \quad C_0 = 6.144'56€$$

3.17

Trobeu el capital inicial que cal col·locar en un banc que capitalitza al 12% efectiu anual compost per obtenir una renda de 2.000 € al final dels pròxims 10 anys.

RAONAMENT

$$C_0 = \frac{q[(1+i_n)^t - 1]}{i_n(1+i_n)^t}$$

$$C_t = C_0(1+i_n)^t$$

$\{q = 2.000\text{€} \quad I = 12\% \quad n = 1\text{any} \quad t = 10\text{anys}\}$

$$C_0 = \frac{q[(1+i_n)^t - 1]}{i_n(1+i_n)^t} = \frac{2.000(1'12^{10} - 1)}{0'12 \cdot 1'12^{10}} \quad \boxed{C_0 = 11.300\text{€}}$$

3.18

Calculeu el import acumulat en un banc al termini de 8 anys si col·loquem 2.000 € al finalitzar cada any a un interès efectiu anual compost del 12%.

RAONAMENT

$$C_t = q \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i_n} \right]$$

$$C_t = C_0(1+i_n)^t$$

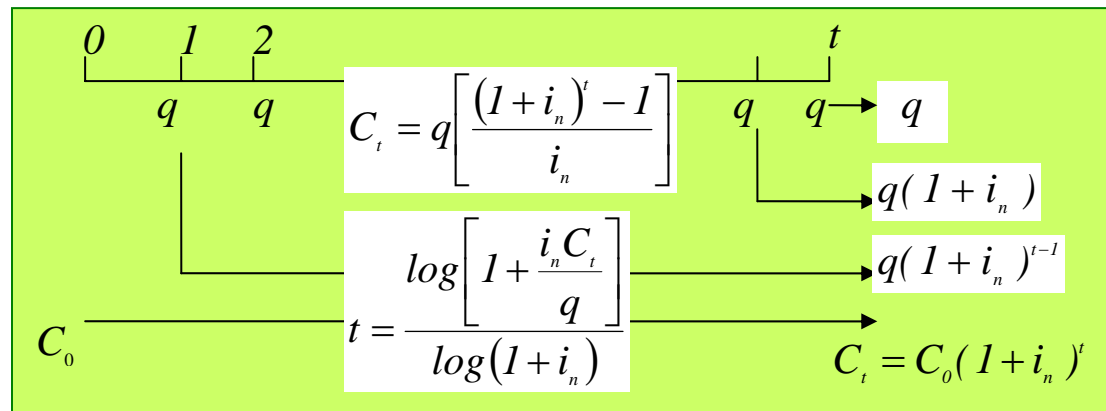
$\{n = 1\text{any} \quad t = 8\text{anys} \quad q = 2.000\text{€} \quad I = 12\%\}$

$$C_t = q \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i_n} \right] = 2.000 \frac{1'12^8 - 1}{0'12} \quad \boxed{C_8 = 24.600\text{€}}$$

3.19

Calculeu el nombre d'ingressos que tenim que realitzar al final de cada any amb un import de 2.500 € capitalitzable al 6% efectiu anual compost per obtenir al final un muntant de 20.985 €

RAONAMENT



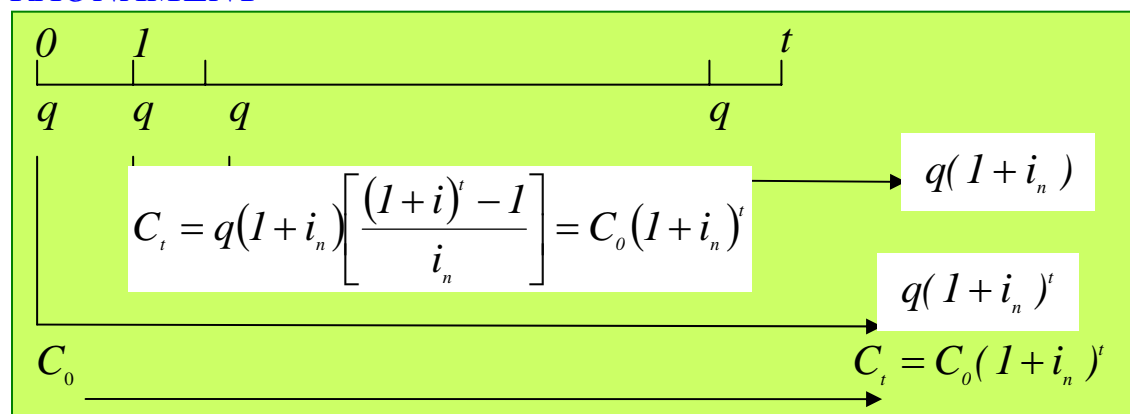
$\{n = 1 \text{ any} \quad q = 2.500€ \quad I = 6\% \quad C_t = 20.985€ \}$

$$t = \frac{\log \left[1 + \frac{i_n C_t}{q} \right]}{\log(1+i_n)} = \frac{\log \left(1 + \frac{0'06 \cdot 20.985}{2.500} \right)}{\log 1'06} \quad \boxed{t = 7 \text{ anys}}$$

3.20

Calculeu el valor actual i final d'una renda de 9 períodes anuals pre-pagable de 500 € cadascun al 10% efectiu anual compost.

RAONAMENT



$\{n = 1 \text{ any} \quad t = 9 \text{ anys} \quad q = 500€ \quad I = 10\%\}$

$$C_t = q(1+i_n) \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i_n} \right] = 500 \cdot 1'1 \frac{1'1^9 - 1}{0'1} \quad \boxed{C_9 = 7.468'7\text{€}}$$

$$C_0 = \frac{C_t}{(1+i_n)^t} = \frac{7.468'7}{1'1^9} \quad \boxed{C_0 = 3.167'46\text{€}}$$