SÈRIE 1

1.

a)

La tarifa de la companyia A segueix la funció $f(x) = 0{,}4x + 20$. Mentre que la tarifa de la companyia B és $g(x) = 0{,}01x^2 + 0{,}1x + 10$.

Per trobar el preu de les tarifes si fem un recorregut de 10 o de 80 km, només hem de substituir:

$$f(10) = 24, \qquad g(10) = 12.$$

Per tant, si fem un recorregut de 10 km la tarifa de la companyia A ens surt 12 euros més cara que la de la companyia B. D'altra banda,

$$f(80) = 52, \qquad g(80) = 82.$$

En aquest cas la tarifa de la companyia A és 30 euros més econòmica que la tarifa de la companyia B.

Si substituïm $x = 0$ a la tarifa de la companyia B, observem que $g(0) = 10$, per tant, efectivament hi ha un cost fix de 10 euros només pel sol fet de pujar al taxi.

b)

Per trobar el valor per al qual les dues tarifes coincideixen, hem de resoldre l'equació:

$$0{,}4x + 20 = 0{,}01x^2 + 0{,}1x + 10$$

$x^2 - 30x - 1000 = 0$ que té per solucions $x = 50$ i $x = -20$.

Descartem la segona solució perquè no té sentit en el context del problema i obtenim que per a una distància de $x = 50$ km les dues tarifes coincideixen.

Per a distàncies entre 0 i 50 km observem que la segona tarifa és inferior a la primera. La diferència de preu entre totes dues tarifes si $x \in [0{,}50)$ vindrà donada per la funció:

$$D(x) = 0{,}4x + 20 - (0{,}01x^2 + 0{,}1x + 10) = -0{,}01x^2 + 0{,}3x + 10.$$

Per trobar el màxim, calculem la derivada

$$D'(x) = -0{,}02x + 0{,}3,$$

la igualem a zero i obtenim $x = 15$.

Observem que es tracta d'un màxim perquè la derivada és positiva per a valors inferiors a $x = 15$, i per tant, la diferència de preu és creixent, mentre que és negativa per a valors superiors a $x = 15$ i, per tant, la funció $D(x)$ és decreixent.

Quan $x = 15$ la diferència de preu entre una tarifa i l'altra és de $D(15) = 12{,}25$ euros.

Criteris de correcció:

a) Trobar les tarifes de les dues companyies si fem un recorregut de 10 km: 0,25 punts. Trobar les tarifes de les dues companyies per al recorregut de 80 km: 0,25 punts. Calcular la diferència en els dos casos: 0,25 punts. Calcular el cost fix de la tarifa de la companyia B: 0,25 punts.

b) Calcular el valor per al qual les dues tarifes coincideixen: 0,5 punts. Trobar la funció que ens dona la diferència entre les dues tarifes: 0,25 punts. Trobar el valor per al qual s'assoleix el màxim: 0,25 punts. Justificar que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Trobar el valor de la diferència màxima de tarifes per a distàncies inferiors a 50 km: 0,25 punts.

2.

a)

Anomenarem x, y i z la producció de sofàs del mes passat de la primera, segona i tercera fàbrica, respectivament. Tenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 1260 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Utilitzant el mètode de Gauss en l'ordre x, y, z, s'obté el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1260 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1260 \\ 0 & 2 & 0 & 1260 \end{array}\right)$$

Es tracta d'un sistema compatible indeterminat, ja que només tenim dues equacions i en canvi tenim tres incògnites, i, per tant, no es pot determinar quants sofàs van produir cadascuna de les tres fàbriques. Tanmateix, observem que podem trobar la producció de la segona fàbrica a partir de la segona equació, i obtenim $y = 630$ sofàs.

b)

Ara tenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 1260 \\ x - y + z = 0 \\ 0{,}1\,x + 0{,}3\,y + 0{,}2\,z = 284 \end{cases}$$

Fem un canvi entre la primera i la segona fila i multipliquem l'última fila per 10. S'obté:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 1260 \\ x + 3y + 2z = 2840 \end{cases}$$

Utilitzant el mètode de Gauss, prenent les variables en l'ordre $x, y, z,$ obtenim la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1260 \\ 1 & 3 & 2 & 2840 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1260 \\ 0 & 4 & 1 & 2840 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 630 \\ 0 & 0 & 1 & 320 \end{array}\right)$$

Podem concloure que és un sistema compatible determinat. Resolent-lo s'obté la solució $z = 320, y = 630$ i $x = 310$. Així doncs, la primera fàbrica va produir 310 sofàs el mes passat, la segona 630 i la tercera 320.

Criteris de correcció:

a) Plantejament del sistema: 0,25 punts cada equació. Resolució del sistema: 0,5 punts. Obtenció del nombre de sofàs produïts per la segona fàbrica: 0,25 punts.

b) Plantejament de l'equació addicional: 0,25 punts. Resolució del sistema: 0,5 punts. Obtenció del nombre de sofàs produïts per la primera i la tercera fàbrica: 0,5 punts.

3.

a)

Si el tractor fa el recorregut a 40 km/h obtenim que el temps que trigarà a fer tot el trajecte és de $\frac{300}{40} = 7{,}5$ hores. Per tant, el cost total del trajecte sumant les despeses de gasoil i el salari del conductor serà

$$\left(5 + \frac{40^2}{98}\right) \cdot 7{,}5 \cdot 1{,}96 + 7{,}5 \cdot 14{,}70 = 423{,}75 \text{ €}$$

Anem ara a buscar la funció que ens dona el cost en funció de la velocitat, en quilòmetres per hora, x:

$$C(x) = \left(5 + \frac{x^2}{98}\right) \cdot \frac{300}{x} \cdot 1{,}96 + \frac{300}{x} \cdot 14{,}70 = \frac{7350}{x} + 6x$$

b)

Per trobar el cost més econòmic cal buscar el mínim de la funció $C(x)$.
Comencem calculant la derivada:

$$C'(x) = -\frac{7350}{x^2} + 6$$

Si la igualem a zero obtenim que x=$\pm\sqrt{\frac{7350}{6}} = \pm 35$ km/h

Descartem la solució negativa perquè no té sentit en el context del problema i observem que la derivada $C'(x)$ és negativa per a valors inferiors a $x = 35$ i, per tant, la funció $C(x)$ és decreixent, mentre que és positiva per a valors superiors a $x = 35$ i, per tant, la funció $C(x)$ és creixent. Així, doncs, en $x = 35$ hi trobem un mínim local.

El cost a aquesta velocitat serà de

$$C(35) = \frac{7350}{35} + 6 \cdot 35 = 420 \text{ €}$$

Criteris de correcció:

a) Càlcul del temps necessari a 40 km/h: 0,25 punts. Càlcul del cost a 40 km/h: 0,5 punts. Obtenció de la funció que dona el cost en funció de x: 0,5 punts.

b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Càlcul del punt on es troba el mínim: 0,25 punts. Justificació que es tracta d'un mínim: 0,25 punts. Càlcul del cost a aquesta velocitat: 0,25 punts.

4.

a)

Comencem calculant el producte que ens demanen

$$10 \cdot A + 3 \cdot B + 18 \cdot C = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 18 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 41 & 3 \\ 11 & 18 & 25 \\ 33 & -5 & 26 \end{pmatrix}.$$

Comprovem que efectivament la matriu és màgica:

$10 + 41 + 3 = 54, 11 + 18 + 25 = 54, 33 - 5 + 26 = 54, 10 + 11 + 33 = 54, 41 + 18 - 5 = 54$ i $3 + 25 + 26 = 54$.

La constant màgica del Martí és 54.

b)

Ara sabem que el pare del Martí va néixer el 8 de setembre però no sabem quina edat té, que anomenarem x. Si calculem la seva matriu màgica obtenim

$$8 \cdot A + 9 \cdot B + x \cdot C = 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -17 + 3x & 9 \\ 1 + x & x & -1 + x \\ -9 + 2x & 17 - x & -8 + 2x \end{pmatrix}.$$

Sabem que la suma de qualsevol fila o columna ha de sumar 153. A partir, per exemple, de la primera fila, obtenim que $8 - 17 + 3x + 9 = 153$ i, per tant, obtenim que $x = 51$.

Així doncs, el pare del Martí té 51 anys.

Criteris de correcció:

a) Càlcul de $10 \cdot A + 3 \cdot B + 18 \cdot C$: 0,5 punts. Comprovació que la matriu obtinguda és màgica: 0,5 punts. Obtenció de la constant màgica del Martí: 0,25 punts.

b) Plantejament del problema: 0,5 punts. Càlcul de la matriu màgica en funció de x: 0,5 punts. Obtenció de l'edat del pare del Martí: 0,25 punts.

5.

Considerem els esdeveniments:

A_1 = el Guiu ha vist la pel·lícula

A_2 = el Roc ha vist la pel·lícula

Sabem que $P(A_1) = 0{,}5$, $P(A_2) = 0{,}6$ i $P(A_1 \cap A_2) = 0{,}25$.

a)

La probabilitat que almenys un dels dos hagi vist la pel·lícula correspon a la unió dels dos esdeveniments:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

I, per tant,

$$P(A_1 \cup A_2) = 0{,}5 + 0{,}6 - 0{,}25 = 0{,}85$$

Així doncs, la probabilitat que almenys un dels dos hagi vist la pel·lícula és de 0,85.

Ara ens demanen

$$P\left(A_2 \cap A_1^C\right) = P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0{,}6 - 0{,}25 = 0{,}35$$

La probabilitat que el Roc hagi vist la pel·lícula però el Guiu no és de 0,35.

b)

Finalment ens demanen la probabilitat condicionada que el Guiu l'hagi vista si sabem que almenys un dels dos l'ha vista:

$$P(A_1 | A_1 \cup A_2) = \frac{P\left(A_1 \cap (A_1 \cup A_2)\right)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{0{,}5}{0{,}85} = 0{,}5882$$

La probabilitat que ens demanen és de 0,5882.

Criteris de correcció:

a) Assignació correcta d'esdeveniments i de les dades de l'enunciat: 0,25 punts. Fórmula de la probabilitat de la unió: 0,25 punts. Resultat de la primera probabilitat demanada: 0,25 punts. Plantejament de la segona probabilitat demanada: 0,5 punts. Obtenció d'aquesta probabilitat: 0,25 punts.

b) Plantejament: 0,5 punts. Resultat: 0,5 punts.

6.

a)

La mida de la mostra és $n = 350$. L'estimació puntual de la proporció de persones que està a favor de la proposta és

$$\hat{p} = \frac{218}{350} = 0{,}6229.$$

L'estimació puntual de la proporció de persones a favor de la proposta és de 0,6229, és a dir, un 62,29%.

b)

Quan la mida de la mostra és gran, l'interval de confiança per a una proporció amb un nivell de confiança $\gamma \epsilon (0{,}1)$ s'obté a partir de la fórmula

$$\left[\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right],$$

en què, si Z segueix una distribució normal (0,1), $\mathrm{P}(-z_\gamma \leq Z \leq z_\gamma) = \gamma$.
Per tant tenim que els extrems de l'interval són

$$\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}6229 - 1{,}96 \sqrt{\frac{0{,}6229(1-0{,}6229)}{350}} = 0{,}5721$$

i

$$\hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}6229 + 1.96 \sqrt{\frac{0{,}6229(1-0{,}6229)}{350}} = 0{,}6737$$

L'interval de confiança demanat és [57,21% , 67,37%], és a dir, el percentatge de persones que està a favor de la proposta està entre el 57,21% i el 67,37% amb una confiança del 95%.

Criteris de correcció:

a) Càlcul de la proporció mostral: 0,75 punts. Expressió com a percentatge: 0,25 punts.

b) Interpretació correcta de la fórmula i substitució correcta de cada paràmetre pel seu valor: 1 punt. Resultat final: 0,5 punts.

SÈRIE 5

1.

a) Si un paquet pesa 9,5 kg estem a la primera opció i, per tant, cal pagar:

$$2 \cdot 15 + 7{,}5 \cdot 12 = 120 \text{ €}.$$

Si un paquet pesa 13 kg estem en la segona de les opcions i, per tant, es paga:

$$11 \cdot 13 + 2 \cdot 15 = 173 \text{ €}.$$

La funció $f(x)$ que dona el preu en funció del pes és

$$f(x) = \begin{cases} 30 & 0 < x \leq 2 \\ 30 + 12(x-2) & 2 < x < 11 \\ 143 + 15(x-11) & 11 \leq x \leq 25 \end{cases}$$

Que simplificada queda

$$f(x) = \begin{cases} 30 & 0 < x \leq 2 \\ 6 + 12x & 2 < x < 11 \\ -22 + 15x & 11 \leq x \leq 25 \end{cases}$$

Hi ha dos punts del domini $x \in (0{,}25)$ en els que podria haver-hi una discontinuïtat, que són $x = 2$ i $x = 11$.

En el punt $x = 2$ observem que

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 30 \text{ i } \lim_{x \to 2^+} f(x) = 6 + 12 \cdot 2 = 30$$

i, per tant, la funció és contínua en aquest punt.

En canvi, en el punt $x = 11$ observem que

$$\lim_{x \to 11^-} f(x) = 6 + 12 \cdot 11 = 138 \text{ i } \lim_{x \to 11^+} f(x) = -22 + 15 \cdot 11 = 143$$

i, per tant, la funció té una discontinuïtat en aquest punt.

b) Per saber quants quilos hem enviat busquem l'antiimatge de 162.

Si ens fixem en els límits que hem calculat i que la funció és creixent en els darrers dos trossos de definició observem que el pes ha de ser més gran de 11 kg, per tant buscarem l'antiimatge en aquest tros:

$$-22 + 15x = 162 \rightarrow 15x = 184 \rightarrow x = \frac{184}{15} = 12{,}27 \text{ kg}.$$

Per tant tenim que el pes del paquet enviat era de 12,27 kg.

Criteris de correcció:

a) Càlcul del preu d'un paquet de 9,5 kg: 0,25 punts. Càlcul del preu d'un paquet de 13 kg: 0,25 punts. Obtenció de la funció general definida a trossos: 0,75 punts. Estudi de la continuïtat: 0,5 punts.

b) Plantejament de l'equació: 0,25 punts. Resolució: 0,5 punts.

2.

a) Anomenem x, y i z els preus de la maleta petita, de la maleta mitjana i de la maleta gran, respectivament. En tots els casos, es tracta del preu sense descompte.
A partir de la informació s'obtenen les següents relacions:

$$\begin{cases} x+y+z = 240 \\ x+y-z=0 \\ 0.9(2x+y+z)=256{,}5 \end{cases}$$

Que correspon a

$$\begin{cases} x+y+z = 240 \\ x+y-z=0 \\ 1{,}8x+0{,}9y+0{,}9z=256{,}5 \end{cases}$$

I si multipliquem la tercera equació per 10 tenim

$$\begin{cases} x+y+z = 240 \\ x+y-z=0 \\ 18x+9y+9z=2565 \end{cases}$$

El podem resoldre pel mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 240 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 18 & 9 & 9 & 2565 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 240 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 285 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 240 \\ 0 & 0 & 2 & 240 \\ 0 & 1 & 1 & 195 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 240 \\ 0 & 1 & 1 & 195 \\ 0 & 0 & 1 & 120 \end{array}\right)$$

Obtenim per tant que $z = 120$, $y = 195 - 120 = 75$ i, finalment, $x = 240 - 120 - 75 = 45$.

Per tant, el preu de la maleta petita és de 45 euros, el de la maleta mitjana és de 75 euros i el de la gran és de 120 euros.

Criteris de correcció:

Assignació d'incògnites: 0,25 punts. Plantejament: 0,25 punts cada equació correcta.
Resolució del sistema: 0,75 punts. Trobar el preu de cada maleta: 0,75 punts.

3.

a) Considerem $I(x)$ la funció que determina els ingressos en funció de x i $D(x)$ la funció que determina les despeses també en funció de x. Aleshores la funció, $B(x)$, que determina els beneficis obtinguts serà:

$$B(x) = I(x) - D(x)$$

De l'enunciat deduïm que si el preu del lloguer de cada vehicle és de $50 + x$ el nombre de vehicles que es lloguen és $250 \ - 2x$. Per tant, els ingressos en funció de x seran

$$I(x) = (50 + x)(250 - 2x) = -2x^2 + 150x + 12500$$

I les despeses

$$D(x) = 250 - 2x$$

Finalment, la funció que ens dona els beneficis en funció de x serà

$$B(x) = \ -2x^2 + 150x + 12500 - (250 - 2x) = -2x^2 + 152x + 12250$$

b) Per trobar el valor òptim del preu de lloguer diari de cada vehicle, caldrà trobar el màxim de la funció $B(x)$. Per això comencem calculant la derivada i mirarem per quins punts s'anul·la:

$$B'(x) = -4x + 152; \ -4x + 152 = 0 \Rightarrow x = 38$$

Cal comprovar que efectivament el valor $x = 38$ correspon a un màxim. Observem que $B'(x) > 0$ per valors inferiors a $x = 38$ i, per tant, $B(x)$ és creixent, mentre que $B'(x) < 0$ per valors més grans que $x = 38$ i, per tant, $B(x)$ és decreixent. Així doncs, en $x = 38$, s'assoleix un màxim.

De manera que el preu òptim al que cal llogar cada vehicle diàriament si es vol aconseguir que l'empresa obtingui el benefici màxim serà de $50 + 38 = 88$ €.

El benefici màxim serà de $B(38) = \ -2(38)^2 + 152 \cdot 38 + 12250 = 15138$ €

Criteris de correcció

a) Determinar la funció que dona els ingressos en funció de x: 0,25 punts. Determinar la funció que dona les despeses en funció de x: 0,25 punts. Determinar la funció que dona els beneficis en funció de x: 0,5 punts.

b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 punts. Justificar que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Trobar el preu de lloguer: 0,25 punts. Obtenció del benefici màxim: 0,25 punts.

4.

a) Podem representar la informació que es dona a l'enunciat amb la següent taula:

	Noms personalitzats	Paraules decoratives	Baldufes
1r client	2	0	3
2n client	1	2	5
3r client	0	0	4

Per tant, la matriu demanada és:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Per trobar el que va facturar a cada client hem de fer el següent producte:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 86 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Per tant, la Laia va facturar 58 € al primer client, 86 € al segon i 24 € al tercer.

b) Per trobar el preu de venda de cada producte es pot plantejar el següent sistema d'equacions:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 \\ 52 \\ 62 \end{pmatrix}$$

Aplicant el Mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 78 \\ 2 & 0 & 4 & 52 \\ 1 & 2 & 3 & 62 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 62 \\ 2 & 0 & 4 & 52 \\ 3 & 1 & 2 & 78 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 62 \\ 0 & 4 & 2 & 72 \\ 0 & 5 & 7 & 108 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 62 \\ 0 & 4 & 2 & 72 \\ 0 & 0 & -18 & -72 \end{array}\right)$$

S'obté $x = 18, y = 16$ i $z = 4$.

Per tant, durant el segon mes la Laia ven els noms personalitzats a 18€, les paraules decoratives a 16€ i les baldufes a 4 €.

Criteris de correcció:

a) Escriure la matriu de vendes: 0,5 punts. Interpretar quin és el producte de matrius que cal realitzar: 0,25 punts. Fer el producte: 0,5 punts. Solució final: 0,25 punts.

b) Plantejament del sistema: 0,25 punts. Resolució del sistema: 0,5 punts. Solució final: 0,25 punts.

5.

Considerem els esdeveniments:

$A_1 =$ el client escull el menú del dia

$A_2 =$ el client escull un plat combinat

$B_1 =$ el client pren cafè

Sabem que $P(A_1) = 0{,}6$ i que $P(A_2) = 0{,}4$. Sabem també que $P(B_1|A_1) = 0{,}75$ i que $P(B_1|A_2) = 0{,}5$.

a) Aplicant la fórmula de les probabilitats totals tenim que

$$P(B_1) = P(B_1 \cap A_1) + P(B_1 \cap A_2) = P(B_1|A_1)P(A_1) + P(B_1|A_2)P(A_2).$$

Per tant,

$$P(B_1) = 0{,}75 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}65.$$

La probabilitat que el client prengui cafè és de 0,65.

b) Aplicant la fórmula de la probabilitat condicionada i la fórmula de Bayes,

$$P(A_1|B_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1|A_1)P(A_1)}{P(B_1)} = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}6}{0{,}65} = 0{,}6923.$$

La probabilitat que hagi escollit el menú del dia si sabem que ha pres cafè és de 0,6923.

Criteris de correcció:

a) Assignació correcta d'esdeveniments i interpretació correcta de les probabilitats de l'enunciat: 0,5 punts. Fórmula de les probabilitats totals: 0,5 punts. Resultat de l'apartat: 0,25 punts.

b) Plantejament: 0,5 punts. Ús correcte de la fórmula de Bayes: 0,5 punts. Resultat: 0,25 punts.

6.

a) Tenim una mostra de mida $n = 175$. Sabem que l'estimació puntual de la mitjana a partir de la mostra és $\bar{x} = 90$ i que la desviació típica mostral és $S = 7$.

L'interval de confiança per a la mitjana amb un nivell de confiança $\gamma \epsilon (0,1)$, quan la variància σ^2 és desconeguda i la mostra és gran ($n \geq 30$) s'obté a partir de la fórmula

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}\right],$$

en què, si Z segueix una distribució normal (0,1), $P\left(-z_\gamma \leq Z \leq z_\gamma\right) = \gamma$.

Per tant tenim que els extrems de l'interval són

$$\bar{x} - z_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 90 - 1{,}96 \frac{7}{\sqrt{175}} = 88{,}9629$$

i

$$\bar{x} + z_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 90 + 1{,}96 \frac{7}{\sqrt{175}} = 91{,}0371$$

L'interval de confiança demanat és [88,9629 , 91,0371].

b) Amb una confiança del 99% els extrems de l'interval seran

$$\bar{x} - z_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 90 - 2{,}58 \frac{7}{\sqrt{175}} = 88{,}6348$$

i

$$\bar{x} + z_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 90 + 2{,}58 \frac{7}{\sqrt{175}} = 91{,}3652$$

L'interval de confiança demanat és [88,6348 , 91,3652].

Els dos intervals són diferents perquè els nivells de confiança són diferents. Com és natural, en el segon cas que el nivell de confiança és més gran, l'interval que obtenim és també més gran. Tenim una confiança més gran que el valor real de la mitjana estarà entre els dos valors obtinguts però l'interval és més gran.

Criteris de correcció:

a) Interpretació correcta de la fórmula i substitució correcta de cada paràmetre pel seu valor: 0,5 punts. Resultat final: 0,5 punts.

b) Interpretació correcta de la fórmula i substitució correcta de cada paràmetre pel seu valor: 0,5 punts. Resultat final: 0,5 punts. Justificació correcta: 0,5 punts.