



SÈRIE 3

1.

- a) Si x és el nombre de pereres addicionals a les 25 plantades inicialment, la producció de cada una de les $25 + x$ pereres serà de $370 - 10x$ peres.

La producció total serà el producte del nombre de peres per arbre pel nombre de pereres:

$$P(x) = (25 + x) \cdot (370 - 10x) \rightarrow P(x) = -10x^2 + 120x + 9250.$$

- b) Per buscar el punt on s'assoleix el màxim de la funció de producció, calculem la derivada i la igulem a zero:

$$P'(x) = -20x + 120 \rightarrow P'(x) = 0 \rightarrow x = 6$$

Observem que és un màxim perquè la derivada és positiva per a valors inferiors a 6 i, per tant, la funció és creixent per a $x < 6$, mentre que és negativa per a valors superiors a 6 i, per tant, la funció és decreixent per a $x > 6$.

Així doncs, el nombre total de pereres que caldrà plantar per hectàrea per obtenir una producció màxima serà de $25 + 6 = 31$ pereres per hectàrea.

La producció màxima serà de $P(6) = 31 \cdot 310 = 9610$ peres.

Per saber a partir de quin valor no hi haurà cap producció cal resoldre $P(x) = 0$

$$-x^2 + 12x + 925 = 0 \rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (925)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-12 \pm 62}{-2}.$$

Tenim dues solucions: $x = -25$ i $x = 37$. La primera correspon a no plantar cap perera per hectàrea i la segona correspon a plantar 37 pereres addicionals per hectàrea. En aquest cas la producció serà nul·la. És a dir, la producció serà nul·la si no es planta cap perera per hectàrea o si es planta un total de $25 + 37 = 62$ pereres per hectàrea.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

- a) Determinar la funció que dona el nombre de pereres en funció de x : 0,25 punts.
Determinar la funció que dona el nombre de peres per perera en funció de x :



0,25 punts. Determinar la funció que dona la producció de peres per hectàrea en funció de x : 0,5 punts.

- b) Càlcul de la derivada: 0,25 punts. Trobar el valor on s'assoleix l'extrem relatiu i justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Nombre òptim de pereres per hectàrea: 0,25 punts. Producció màxima: 0,25 punts. Càlcul del nombre de pereres per hectàrea per tal que no hi hagi producció de peres: 0,5 punts.



2.

Anomenarem x , y i z el nombre de sabates que es van vendre al preu original, amb un descompte del 20% i amb un descompte del 50%, respectivament.

El preu original era de 90 euros; el preu amb un 20% de descompte és de $0,8 \cdot 90 = 72$ euros, i el preu amb un 50% de descompte és de $0,5 \cdot 90 = 45$ euros.

A partir de l'enunciat obtenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 820.000 \\ y - 2z = 0 \\ 90x + 72y + 45z = 63.837.000 \end{cases}$$

La tercera equació la podem simplificar dividint-la per 9 i obtenim:

$$10x + 8y + 5z = 7.093.000$$

Resolem el sistema utilitzant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 820.000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 10 & 8 & 5 & 7.093.000 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 820.000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1.107.000 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 820.000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1.107.000 \end{array} \right)$$

Resolent-lo s'obté la solució $z = 123.000$, $y = 246.000$ i $x = 451.000$.

Així doncs, es van vendre 451.000 parells de sabates al preu original, 246.000 amb un descompte del 20% i 123.000 al 50%.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

- a) Plantejament del sistema: 0,25 punts per cada equació. Resolució del sistema: 1 punt. Determinar el nombre de sabates venudes a cada preu: 0,75 punts.



3.

a) Considerem els esdeveniments

R = el visitant ha fet la ruta guiada.

C = el visitant ha accedit al parc en cotxe.

B = el visitant ha accedit al parc en bicicleta.

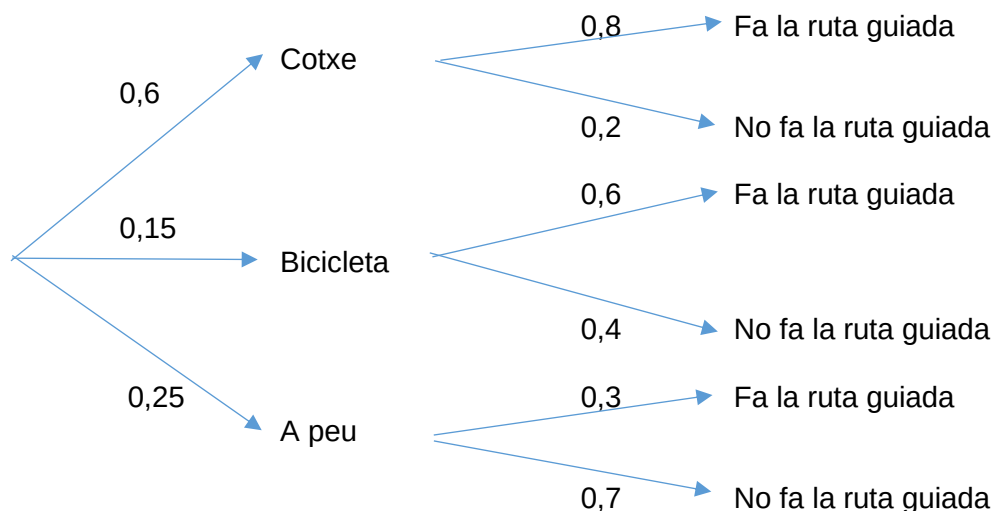
P = el visitant ha accedit al parc a peu.

A partir de les dades de l'enunciat sabem que $P(C) = 0,6$, $P(B) = 0,15$ i $P(P) = 0,25$. Sabem també que $P(R|C) = 0,8$, $P(R|B) = 0,6$ i $P(R|P) = 0,3$.

Aleshores, per la fórmula de les probabilitats totals,

$$P(R) = P(R \cap C) + P(R \cap B) + P(R \cap P) = P(C) \cdot P(R|C) + P(B) \cdot P(R|B) + P(P) \cdot P(R|P) = 0,6 \cdot 0,8 + 0,15 \cdot 0,6 + 0,25 \cdot 0,3 = 0,645.$$

També ho podem resoldre mitjançant un diagrama d'arbre



Així doncs, la probabilitat que un individu escollit a l'atzar faci la ruta guiada és de 0,645.

Ara ens demanen que calculem la probabilitat que hi hagi accedit en cotxe si sabem que ha fet la ruta guiada. Per tant,

$$P(C|R) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{P(C) \cdot P(R|C)}{P(R)} = \frac{0,6 \cdot 0,8}{0,645} = 0,7442.$$

Si sabem que fa la ruta guiada, la probabilitat que hagi accedit al parc en cotxe és de 0,7442.



- b) La mida de la mostra és $n = 100$. L'estimació puntual de la mitjana i la desviació típica en la mostra han estat $\bar{x} = 231$ i $s = 32$.

Quan la mida de la mostra és gran, l'interval de confiança per a la mitjana amb un nivell de confiança $\gamma \in (0,1)$ s'obté a partir de la fórmula

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right],$$

en què, si Z segueix una distribució normal $(0,1)$, $P(-z_\gamma \leq Z \leq z_\gamma) = \gamma$. Per tant, tenim que els extrems de l'interval són:

$$\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 231 - 1,96 \frac{32}{\sqrt{100}} = 224,728$$

i

$$\bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 231 + 1,96 \frac{32}{\sqrt{100}} = 237,272$$

L'interval de confiança demanat és $[224,728, 237,272]$ minuts. És a dir, amb una confiança del 95% sabem que la mitjana de temps que els visitants passen al parc natural està entre 224,728 i 237,272 minuts.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

- a) Assignació correcta d'esdeveniments: 0,25 punts. Càlcul de la primera probabilitat demanada: 0,5 punts. Càlcul de la segona probabilitat demanada: 0,5 punts.
- b) Interpretació correcta de la fórmula i substitució correcta de cada paràmetre pel seu valor: 0,5 punts. Resultat final: 0,75 punts.



4.

OPCIÓ A

a) Considerem les matrius:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} E & M \end{matrix} \\ \begin{matrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 20 & 80 \\ 30 & 100 \\ 40 & 110 \end{pmatrix} \end{matrix} \text{ i } I = \begin{matrix} E \\ M \end{matrix} \begin{pmatrix} 40.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}.$$

Si fem el producte de $A \cdot I$ obtindrem els ingressos per la venda de tots els cotxes de cada línia.

$$A \cdot I = \begin{pmatrix} 20 & 80 \\ 30 & 100 \\ 40 & 110 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40.000 \\ 30.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.200.000 \\ 4.200.000 \\ 4.900.000 \end{pmatrix}.$$

Obtenim que la línia 1 generarà uns ingressos de 3.200.000 €, la línia 2 generarà uns ingressos de 4.200.000 € i la línia 3 uns ingressos de 4.900.000 €.

Considerem els esdeveniments:

E = el vehicle és de motor elèctric.

C = el vehicle és de motor de combustió.

D = el vehicle és defectuós.

A la fàbrica hi ha 90 cotxes elèctrics i 290 cotxes de motor de combustió. Per tant, si escollim un cotxe a l'atzar $P(E) = \frac{90}{90+290} = 0,2368$ i $P(C) = \frac{290}{90+290} = 0,7632$.

També sabem que $P(D|E) = 0,01$ i $P(D|C) = 0,02$.

Ens demanen la probabilitat $P(C|D)$

Podem fer un diagrama d'arbre o bé calcular la probabilitat condicionada utilitzant la fórmula de Bayes

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|C) \cdot P(C)}{P(D|E) \cdot P(E) + P(D|C) \cdot P(C)} = \frac{0,02 \cdot 0,7632}{0,01 \cdot 0,2368 + 0,02 \cdot 0,7632} = 0,8657.$$

b) La funció que representa la despesa acumulada després de cada x km recorreguts per cada tipus de vehicle ve donada per la despesa de compra més la despesa pels quilòmetres recorreguts.

Per als vehicles elèctrics, el preu de venda és de 40.000 euros i 1 euro cada 100 km recorreguts. Per tant, la funció que dona la despesa en euros en funció dels quilòmetres recorreguts serà:



$$D_E(x) = 40.000 + \frac{1}{100}x.$$

Mentre que per als vehicles de combustió aquesta funció serà:

$$D_T(x) = 30.000 + \frac{6}{100}x.$$

Inicialment surt més car el vehicle elèctric. Igualet les despeses per trobar a partir de quants quilòmetres sortirà més econòmic el vehicle elèctric.

$$40.000 + \frac{1}{100}x = 30.000 + \frac{6}{100}x \Rightarrow 10.000 = 0,05x \Rightarrow x = 200.000 \text{ km}$$

Als 200.000 km les despeses seran iguals. A partir dels 10 anys serà més econòmic el vehicle elèctric.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

- a) Obtenció de les matrius i càlcul del producte de matrius: 0,75 punts. Càlcul de la probabilitat demanada: 0,75 punts.
- b) Obtenció de les funcions que donen les despeses: 0,25 punts cadascuna. Obtenció del nombre d'anys a partir del qual surt més a compte el cotxe elèctric: 0,5 punts.



OPCIÓ B

- a) Si anomenem x la quantitat de vehicles elèctrics que hi ha a la línia 2 sabem que $40.000x + 3.000.000 = 3.720.000 \Rightarrow 40.000x = 720.000 \Rightarrow x = 18$, per tant a la línia 2 hi ha 18 vehicles elèctrics i 100 de combustió.

Considerem els esdeveniments:

E = el vehicle és de motor elèctric.

C = el vehicle és de motor de combustió.

D = el vehicle és defectuós.

A la línia 2 hi ha 18 cotxes elèctrics i 100 cotxes de motor de combustió. Per tant, si escollim un cotxe a l'atzar $P(E) = \frac{18}{18+100} = 0,1525$ i $P(C) = \frac{100}{18+100} = 0,8475$.

També sabem que $P(D|E) = 0,01$ i $P(D|C) = 0,02$.

Ens demanen la probabilitat $P(E|D)$

Podem fer un diagrama d'arbre o bé calcular la probabilitat condicionada utilitzant la fórmula de Bayes

$$P(E|D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|E) \cdot P(E)}{P(D|E) \cdot P(E) + P(D|C) \cdot P(C)} = \frac{0,01 \cdot 0,1525}{0,01 \cdot 0,1525 + 0,02 \cdot 0,8475} = 0,0825.$$

La probabilitat que sigui elèctric és de 0,0825.

- a) La funció que representa la despesa acumulada entre el preu de compra i els quilòmetres recorreguts x és:

$$D(x) = 30.000 + \frac{6}{100}x.$$

Per tant,

$$30.000 + \frac{6}{100}x = 36.000 \Rightarrow x = 100.000 \text{ km}$$

Així doncs, el vehicle ha recorregut 100.000 km.

Si el vehicle fos elèctric, la despesa acumulada seria de $40.000 + \frac{1}{100}x$, que substituint per $x = 100.000$ km, ens dona 41.000 euros.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.



- a) Càlcul dels nombre de vehicles elèctrics a la línia 2: 0,5 punts. Càlcul de la probabilitat demanada: 1 punt.
- b) Càlcul del nombre de quilòmetres: 0,5 punts. Càlcul de la despesa d'un vehicle elèctric amb el mateix nombre de quilòmetres: 0,5 punts.