



## SÈRIE 2

### Exercici 1

a) Comencem calculant l'ingrés setmanal en funció del preu.

$$I(p) = p \cdot d(p) = p(500 - 10p - p^2) = 500p - 10p^2 - p^3,$$

per a valors de  $p$  tals que  $0 < p < 15$ .

Per a trobar el màxim, hem de calcular la derivada d'aquesta funció

$$I'(p) = 500 - 20p - 3p^2.$$

L'igualem a zero,  $I'(p) = 0$ ,

$$500 - 20p - 3p^2 = 0.$$

I resollem l'equació de segon grau

$$p = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(-3)(500)}}{2(-3)} = \frac{20 \pm \sqrt{6400}}{2(-3)} = \frac{20 \pm 80}{-6}.$$

Trobem dues solucions,  $-\frac{50}{3}$  i 10. En el context del problema, només té sentit la solució positiva  $p = 10$  €.

Com que la derivada és contínua, per a comprovar que efectivament es tracta d'un màxim, estudiem el signe de la derivada abans i després d'aquest valor:

$$I'(9) = 77 \text{ i } I'(11) = -83.$$

Observem, per tant, que la funció és creixent per a valors inferiors a  $p = 10$  i és decreixent per a valors superiors. Per tant, a  $p = 10$  hi trobem un màxim. La demanda quan  $p = 10$  és

$$d(10) = 500 - 10 \cdot 10 - 10^2 = 300 \text{ unitats.}$$

I l'ingrés setmanal amb aquest preu serà

$$I(10) = 10 \cdot 300 = 3\,000 \text{ €.}$$

Hem obtingut, per tant, que l'ingrés màxim s'obté amb un preu de 10 €, amb el qual obtenim una demanda de 300 unitats i uns ingressos de 3 000 €.



- b) Per tal de calcular l'elasticitat-preu comencem calculant la derivada de la demanda

$$d'(p) = -10 - 2p.$$

Ara apliquem la fórmula que ens donen per a trobar l'elasticitat-preu de la demanda

$$E(p) = \frac{p}{d(p)} q d'(p) = \frac{p \cdot (-10 - 2p)}{500 - 10p - p^2}, \quad 0 < p < 15.$$

Ara calculem el valor de l'elasticitat de la demanda per als dos preus que ens demanen.

$$E(5) = -\frac{4}{17} = -0,2353$$

i

$$E(10) = -1.$$

Observem que el valor de l'elasticitat de la demanda és de -0,2353 per a un preu de 5 € i de -1 per a un preu de 10 €.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

- a) Obtenció de l'equació de l'ingrés setmanal: 0,25 punts. Càlcul de la derivada: 0,25 punts. Obtenció del màxim: 0,25 punts. Justificació de l'afirmació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Obtenció de la demanda associada a aquest preu: 0,25 punts. Obtenció de l'ingrés associat a aquest preu: 0,25 punts.
- b) Obtenció de l'expressió que dona l'elasticitat de la demanda: 0,5 punts. Càlcul del valor de l'elasticitat de la demanda pels preus de 5 € i de 10 €: 0,25 punts, cadascun.



## Exercici 2

- a) Considerem les variables  $x, y$  i  $z$ , que corresponen al nombre d'alumnes que han anat a Roma, que han anat a Londres i que no han marxat enlloc, respectivament. Obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 84 \\ 3y - z = 0 \end{cases}$$

Apliquem el mètode de Gauss prenent les variables en l'ordre  $x, y$  i  $z$  i obtenim la matriu:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 84 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Clarament, es tracta d'un sistema compatible indeterminat, ja que tenim dues equacions i tres incògnites. Per tant, no és possible determinar quants alumnes han anat a cada viatge i quants no han marxat.

- b) Resolem el sistema anterior fent servir com a paràmetre la variable  $y$ , obtenim  $z = 3y$  i  $x = 84 - y - z = 84 - 4y = 4(21 - y)$ . Veiem clarament que, efectivament, el nombre d'alumnes que no han marxat enlloc,  $z$ , és múltiple de 3 i que el nombre d'alumnes que han anat a Roma,  $x$ , és múltiple de 4.
- c) Ara afegim la informació nova. El sistema que obtenim és:

$$\begin{cases} x + y + z = 84 \\ 3y - z = 0 \\ x + 4 = 2(y + z - 4) \end{cases}$$

Que és equivalent a:

$$\begin{cases} x + y + z = 84 \\ 3y - z = 0 \\ x - 2y - 2z = -12 \end{cases}$$

Si apliquem el mètode de Gauss, tenim:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 84 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -12 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 84 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -96 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 84 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -96 \end{array} \right)$$

Observem que es tracta d'un sistema compatible determinat. Resolent-lo, s'obté la solució  $z = 24$ ,  $y = 8$  i  $x = 52$ .

Per tant, obtenim que 52 alumnes han anat a Roma, 8 han anat a Londres i 24 no han marxat enlloc.



**Criteris de correcció:**

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

- a) Escriure el sistema: 0,25 punts per equació correcta. Resposta a la pregunta: 0,25 punts.
- b) Resolució del sistema en funció de  $y$ : 0,25 punts. Justificació del fet que  $z$  és múltiple de 3: 0,25 punts. Justificació del fet que  $x$  és múltiple de 4: 0,25 punts.
- c) Obtenció de l'equació addicional: 0,25 punts. Resolució del sistema: 0,5 punts. Obtenció de la solució final: 0,25 punts.



### Exercici 3

a) Considerem els esdeveniments:

$P_1$  = l'estudiant és de primer any

$P_2$  = l'estudiant és de segon any

$A$  = l'estudiant aprova l'assignatura

A partir de l'enunciat, sabem les probabilitats següents:

$$P(P_1) = 0,70, \quad P(P_2) = 1 - 0,70 = 0,30$$

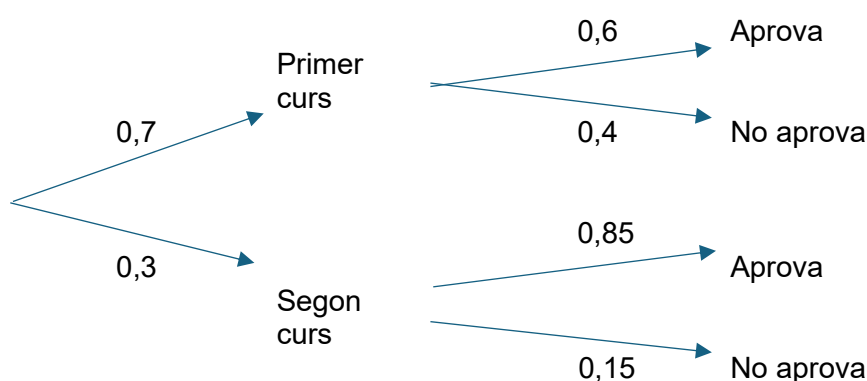
$$P(A|P_1) = 0,60, \quad P(A|P_2) = 0,85$$

Per a calcular la probabilitat que un estudiant escollit a l'atzar aprovi, utilitzem el teorema de les probabilitats totals:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap P_1) + P(A \cap P_2) = P(A|P_1)P(P_1) + P(A|P_2)P(P_2) \\ &= (0,60 \times 0,70) + (0,85 \times 0,30) = 0,42 + 0,255 = 0,675 \end{aligned}$$

Per tant, la probabilitat que un estudiant escollit a l'atzar aprovi l'assignatura és de 0,675.

També ho podem plantejar mitjançant un diagrama d'arbre:



Ara hem de calcular quina és la probabilitat que un estudiant sigui de primer curs, si sabem que ha aprovat l'assignatura. Utilitzarem el teorema de Bayes:

$$P(P_1|A) = \frac{P(A|P_1)P(P_1)}{P(A)} = \frac{0,60 \times 0,70}{0,675} = \frac{0,42}{0,675} = \frac{28}{45} \approx 0,6222$$



Per tant, la probabilitat que un estudiant que ha aprovat l'assignatura sigui de primer any és aproximadament de 0,6222.

- b) Sabem que l'interval de confiança amb un nivell de confiança  $\gamma \in (0,1)$  per a la proporció, quan la mida de la mostra és gran, és donat per

$$\left[ \hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

Tenim les dades següents:

Mida mostral:  $n = 80$

Nombre d'èxits (aprovats):  $x = 55$

Proporció mostral:  $\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{55}{80} = 0,6875$

Nivell de confiança:  $\gamma = 0,95 \Rightarrow z_\gamma = 1,96$

Calculem

$$1,96 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,6875 \times 0,3125}{80}} \approx 0,1016.$$

Per tant, l'interval de confiança del 95 % és

$$[0,6875 - 0,1016; 0,6875 + 0,1016] = [0,5859; 0,7891].$$

L'interval de confiança del 95 % per a la proporció d'aprovats, després d'aplicar el nou mètode, és  $[0,586; 0,789]$ , és a dir, el percentatge d'aprovats després d'aplicar el mètode està entre el 58,6 % i el 78,9 % amb una confiança del 95 %.

Segons el que hem calculat a l'apartat anterior, la proporció d'aprovats abans del nou mètode era de 0,675; és a dir, aprovava un percentatge del 67,5 %. L'interval de confiança obtingut  $[0,586; 0,789]$  inclou el valor 0,675; per tant, amb un nivell de confiança del 95 % no podem afirmar que el nou mètode hagi millorat la taxa d'aprovats.



**Criteris de correcció:**

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

- a) Assignació correcta d'esdeveniments: 0,25 punts. Càlcul de la primera probabilitat demanada: 0,5 punts. Càlcul de la segona probabilitat demanada: 0,5 punts.
- b) Càlcul de la proporció mostral: 0,25 punts. Interpretació correcta de la fórmula i substitució correcta de cada paràmetre pel seu valor: 0,5 punts. Resultat final: 0,25 punts. Justificació correcta del que no podem afirmar a partir del resultat: 0,25 punts.



## Exercici 4

### OPCIÓ A

- a) Durant el curs passat es van dur a terme  $96 + 84 = 180$  activitats presencials, d'un total de 240 activitats. Per tant, la probabilitat que una inscripció correspongui a una activitat presencial és

$$p = P(\text{presencial}) = \frac{180}{240} = 0,75.$$

Per tant, la probabilitat que una inscripció sigui d'una activitat no presencial és  
 $q = 1 - p = 0,25$ .

Considerem la variable aleatòria

$X$  = nombre d'inscripcions a activitats presencials.

Atès que es reben 15 inscripcions independents, la variable  $X$  segueix una distribució binomial

$$X \sim B(15, 0,75).$$

La probabilitat que exactament 10 de les 15 inscripcions siguin per a activitats presencials és

$$P(X = 10) = \binom{15}{10} (0,75)^{10} (0,25)^5 \approx 0,1651.$$

El valor esperat d'una variable binomial és

$$E(X) = n \cdot p = 15 \cdot 0,75 = 11,25.$$

És a dir, la probabilitat que hi hagi exactament 10 inscripcions d'activitats presencials és de 0,1651 i el nombre esperat d'inscripcions presencials és d'11.

- b) Considerem ara les variables següents

$x$  = nombre d'activitats en què ha participat la Carme,

$y$  = nombre d'activitats en què ha participat el Saïd,

$z$  = nombre d'activitats en què ha participat el Martí.

Traduïm la informació de l'enunciat en equacions. D'una banda, sabem que la Carme ha participat en 30 activitats més que el Martí, per tant,

$$x = z + 30.$$

D'altra banda, també sabem que el Saïd ha participat en 18 activitats més que el Martí, és a dir,

$$y = z + 18.$$

Finalment, entre tots tres han dut a terme 240 activitats, per tant,

$$x + y + z = 240.$$

Obtenim així el sistema d'equacions següent:



$$\begin{cases} x - z = 30, \\ y - z = 18, \\ x + y + z = 240. \end{cases}$$

Apliquem el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 30 \\ 0 & 1 & -1 & 18 \\ 1 & 1 & 1 & 240 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 30 \\ 0 & 1 & -1 & 18 \\ 0 & 1 & 2 & 210 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 30 \\ 0 & 1 & -1 & 18 \\ 0 & 0 & 3 & 192 \end{array}\right).$$

I obtenim la solució del sistema:

$$x = 94, y = 82, z = 64.$$

Per tant, la Carme ha participat en 94 activitats; el Saïd, en 82, i el Martí, en 64.

#### Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

- a) Càlcul de la probabilitat que una inscripció sigui d'una activitat presencial: 0,25 punts.  
Plantejament de la binomial: 0,25 punts. Càlcul de la binomial: 0,5 punts.  
Càlcul del valor esperat: 0,5 punts.
- b) Plantejament de les equacions del sistema: 0,5 punts. Resolució del sistema: 0,5 punts.



## OPCIÓ B

- a) En primer lloc, hem de resoldre l'equació  $f(t) = 20$ , és a dir,

$$\frac{100t}{t^2 + 4} = 20.$$

Obtenim

$$100t = 20(t^2 + 4).$$

Simplificant i reordenant els termes, ens queda l'equació de segon grau

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

Les solucions d'aquesta equació són  $t = 1$  i  $t = 4$ .

Per tant, el nombre de famílies inscrites als tallers és exactament 20 el primer i el quart dia posteriors a l'inici de la campanya.

Per determinar el valor màxim de la funció, calculem la derivada de  $f(t)$  i la iguaem a zero:

$$f'(t) = \frac{100(t^2 + 4) - 100t \cdot 2t}{(t^2 + 4)^2}.$$

Imposant  $f'(t) = 0$  i simplificant el numerador, obtenim

$$100(t^2 + 4 - 2t^2) = 0,$$

és a dir,

$$100(4 - t^2) = 0.$$

Aquesta equació té dues solucions:  $t = 2$  i  $t = -2$ . Atès que, en el context del problema  $t \geq 0$ , es descarta la solució negativa.

Utilitzant la continuïtat de la derivada, per a comprovar que  $t = 2$  correspon a un màxim, estudiem el signe de la derivada:

si  $0 < t < 2$ , aleshores  $f'(t) > 0$  i la funció és creixent;

si  $t > 2$ , aleshores  $f'(t) < 0$  i la funció és decreixent.

Per tant, en  $t = 2$  la funció assoleix un màxim. Calculem ara el valor d'aquest màxim:

$$f(2) = \frac{100 \cdot 2}{2^2 + 4} = 25.$$

Així, el nombre màxim de famílies inscrites és de 25 i s'assoleix el segon dia des de l'inici de la campanya.

- b) Hem de calcular ara el producte de la matriu de repartiment percentual pel vector d'hores totals:

$$R \cdot h = \begin{pmatrix} 0,50 & 0,30 & 0,20 \\ 0,30 & 0,50 & 0,20 \\ 0,20 & 0,20 & 0,60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21,3 \\ 20,7 \\ 18 \end{pmatrix}.$$



El vector obtingut indica el nombre total d'hores que ha dedicat cadascun dels tres amics a la preparació de les activitats: la primera component correspon a la Carme; la segona, al Saïd, i la tercera, al Martí.

Observem, per tant, que la persona que ha dedicat més hores a la preparació és la Carme, amb 21,3 hores.

#### Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

- a) Plantejament de l'equació que cal resoldre: 0,25 punts. Obtenció de les dues solucions: 0,5 punts. Càlcul de la derivada: 0,25 punts. Obtenció i comprovació de l'extrem: 0,25 punts. Obtenció del nombre màxim de famílies inscrites: 0,25 punts.
- b) Càlcul del producte de matrius: 0,5 punts. Interpretació del producte: 0,25 punts. Obtenció de la persona que hi ha dedicat més hores: 0,25 punts.