

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

Sèrie 2

Indiqueu l'opció triada:

Exercici 4: Opció A ☐ Opció B ☐

Espai per a la correcció

Qualificació	
Exercici 1	
Exercici 2	
Exercici 3	
Exercici 4	
Suma de notes parcials	
Qualificació final	

Espai per a la revisió

Comprovació	2a correcció

Etiqueta de qualificació

Etiqueta de correcció

Etiqueta de l'estudiant

Ubicació del tribunal

Número del tribunal

L'examen consta de QUATRE exercicis obligatoris. Cada exercici val 2,5 punts. Feu els exercicis 1, 2 i 3 respondent a TOTES les qüestions que s'hi plantegen. A l'exercici 4, trieu UNA de les dues opcions (A o B) proposades i indiqueu-la a la portada.

En totes les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què. Cal que la redacció de la resposta es faci de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara.

Podeu utilitzar la pàgina en blanc del final del quadern per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a algun exercici si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de l'exercici corresponent.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Exercici 1

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 1	
---------------------------------	--

Una empresa comercialitza un accessori tecnològic. Segons diversos estudis de mercat, la relació entre el preu de venda p (en euros) i la quantitat demanada setmanal $d(p)$ (en unitats) és donada per la funció $d(p) = 500 - 10p - p^2$, $0 < p < 15$.

Es defineix també l'ingrés setmanal de l'empresa com a $I(p) = p \cdot d(p)$.

- 1.1.** Determineu el preu p que maximitza l'ingrés setmanal $I(p)$. Per a aquest preu, calculeu la quantitat demanada setmanal corresponent i el valor de l'ingrés màxim.

[1,5 punts]

Puntuació de l'apartat 1.1	
----------------------------	--

- 1.2. El concepte de l'elasticitat de la demanda respecte al preu mesura, com el seu nom indica, la sensibilitat de la quantitat demanada davant dels canvis relatius en el preu, i s'utilitza per a analitzar com responen els consumidors a les variacions de preus. Per a funcions derivables, l'elasticitat de la demanda respecte al preu és donada per l'expressió

$$E(p) = \frac{p}{d(p)} d'(p), \text{ en què } d'(p) \text{ denota la derivada de la funció } d(p).$$

Calculeu l'expressió de l'elasticitat de la demanda respecte al preu $E(p)$ i determineu-ne el valor per a un preu de 5 € i per a un preu de 10 €.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 1.2	
----------------------------	--

Exercici 2

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 2	
---------------------------------	--

A l'Institut La Closa s'ha organitzat un viatge a Roma per a l'alumnat de segon de batxillerat, però no tots els alumnes hi han volgut anar. Alguns alumnes han organitzat, pel seu compte, un viatge alternatiu a Londres, mentre que d'altres han decidit no viatjar enlloc. Sabem que a segon de batxillerat hi ha un total de 84 alumnes i que el nombre d'alumnes que no han marxat enlloc és el triple del nombre d'alumnes que han anat a Londres.

- 2.1.** Plantegeu i estudieu el sistema d'equacions corresponent. Es pot determinar el nombre d'alumnes que han anat a cada viatge i el nombre d'alumnes que no han marxat enlloc? Justifiqueu la resposta.

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 2.1	
----------------------------	--

- 2.2.** Resoleu el sistema anterior en funció del nombre d'alumnes que han anat a Londres. Deduïu que el nombre d'alumnes que no han marxat enlloc és un múltiple de 3 i que el nombre d'alumnes que han anat a Roma és un múltiple de 4.

[0,75 punts]

Puntuació de l'apartat 2.2	
----------------------------	--

- 2.3.** Disposem ara d'una nova informació: si 4 alumnes dels que no han marxat enlloc s'haguessin afegit al viatge a Roma, aleshores el nombre d'alumnes que hauria anat a Roma hauria estat el doble del nombre d'alumnes que han anat a Londres i dels que no haurien marxat enlloc conjuntament. Es pot determinar ara quants alumnes han anat a cada viatge i quants no han marxat enlloc? Justifiqueu la resposta i, si és possible, trobeu aquestes quantitats.

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 2.3	
----------------------------	--

Exercici 3

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 3	
---------------------------------	--

En una assignatura d'un màster de dos anys, el 70 % dels estudiants són de primer curs i la resta són de segon curs. Segons dades de cursos anteriors, la probabilitat d'aprovar l'assignatura és del 60 % per als estudiants de primer curs i del 85 % per als de segon curs.

FÓRMULES PER A RESOLDRE L'EXERCICI:

- $Z \sim \text{normal}(0, 1) \rightarrow P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$ i $P(-2,58 \leq Z \leq 2,58) = 0,99$

- Intervals de confiança amb un nivell de confiança $\gamma \in (0, 1)$

— per a la proporció (mostres grans):

$$\left[\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

— per a la mitjana (mostres normals amb la variància σ^2 coneguda):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

— per a la mitjana (mostres grans amb la variància σ^2 desconeguda):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

- 3.1. Si escollim un estudiant a l'atzar, quina és la probabilitat que aprovi l'assignatura? Si sabem que un estudiant ha aprovat l'assignatura, quina és la probabilitat que sigui de primer curs?

[1,25 punts]

Puntuació de l'apartat 3.1	
----------------------------	--

- 3.2. El professor vol estimar la nova proporció d'estudiants que aproven l'assignatura després d'introduir un nou mètode d'ensenyament. Per fer-ho, selecciona una mostra aleatòria de $n = 80$ estudiants i observa que 55 d'ells han aprovat.

Trobeu un interval de confiança del 95 % per a la proporció p d'aprovat amb el nou mètode. L'interval obtingut permet afirmar que el nou mètode ha millorat la taxa d'aprovat respecte de la situació anterior? Raoneu la resposta.

[1,25 punts]

Puntuació de l'apartat 3.2	
----------------------------	--

Exercici 4

[2,5 punts en total]

Puntuació total de l'exercici 4	
---------------------------------	--

Tres amics —la Carme, el Saïd i el Martí— van crear fa uns anys una petita associació dedicada a la divulgació de les matemàtiques. En aquesta associació organitzen tallers per a famílies, visiten escoles i instituts d'arreu del país, i imparteixen seminaris en línia.

El curs passat van dur a terme un total de 240 activitats, repartides en 96 tallers familiars, 84 xerrades en escoles o instituts i 60 seminaris en línia. Els dos primers tipus d'activitats són presencials, mentre que els seminaris en línia, evidentment, no ho són.

Trieu UNA de les dues opcions (A o B) i responeu a les qüestions que s'hi plantegen. **Indiqueu a la portada de l'examen l'opció escollida.**

OPCIÓ A

- 4.1. Aquest curs, durant una setmana concreta, el formulari d'inscripció del web de l'associació rep 15 inscripcions independents, cadascuna de les quals correspon a un dels tres tipus d'activitats.

Suposant que la distribució de les inscripcions es manté com el curs passat, calculeu la probabilitat que exactament 10 de les 15 inscripcions siguin per a activitats presencials.

Determineu el nombre esperat d'inscripcions a activitats presencials d'aquella setmana.

[1,5 punts]

Puntuació de l'apartat 4.1	
----------------------------	--

- 4.2. El curs passat, per a dur a terme les 240 activitats, els tres amics van decidir organitzar-se de manera que cada activitat fos duta a terme per una sola persona; és a dir, no hi havia activitats desenvolupades per més d'un d'ells. Si sabem que la Carme va participar en 30 activitats més que el Martí i que el Saïd va participar en 18 activitats més que el Martí, de quantes activitats es va encarregar cadascun dels tres amics?

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 4.2	
----------------------------	--

OPCIÓ B

- 4.1. Per estudiar l'efecte d'una campanya de promoció dels tallers familiars d'aquest curs, els tres amics modelitzen el nombre de famílies inscrites mitjançant la funció

$$f(t) = \frac{100t}{t^2 + 4}, \text{ en què } t \text{ representa el nombre de dies des de l'inici de la campanya i } f(t)$$

correspon al nombre de famílies inscrites aquell dia.

Hi ha algun dia en què el nombre de famílies inscrites sigui exactament 20? En cas afirmatiu, indiqueu quin.

Quin dia s'assoleix el nombre màxim de famílies inscrites? Quin és aquest nombre màxim?

[1,5 punts]

Puntuació de l'apartat 4.1	
----------------------------	--

- 4.2. Els tres amics també volen analitzar com es reparteixen entre ells la feina de preparació de les activitats. Per fer-ho, revisen com s'han organitzat durant una setmana concreta. En total, en aquest període han dedicat 24 hores a la preparació de tallers familiars, 21 hores a la preparació de xerrades en centres educatius i 15 hores a la preparació de seminaris en línia.

La distribució de la feina de preparació de cadascun dels tres tipus d'activitats és la següent:

- la Carme s'encarrega del 50 % de la preparació dels tallers familiars, del 30 % de la preparació de les xerrades en centres educatius i del 20 % de la preparació dels seminaris en línia;
- el Saïd s'encarrega del 30 % de la preparació dels tallers familiars, del 50 % de la preparació de les xerrades en centres educatius i del 20 % de la preparació dels seminaris en línia;
- el Martí s'encarrega del 20 % de la preparació dels tallers familiars, del 20 % de la preparació de les xerrades en centres educatius i del 60 % de la preparació dels seminaris en línia.

Agrupem aquesta informació en les matrius següents:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0,50 & 0,30 & 0,20 \\ 0,30 & 0,50 & 0,20 \\ 0,20 & 0,20 & 0,60 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 24 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix},$$

que corresponen a la matriu de repartiment percentual i al vector d'hores totals dedicades a la preparació de cada tipus d'activitat, respectivament.

Calculeu el vector $\mathbf{R} \cdot \mathbf{h}$ i interpreteu-ne el significat.

Quin dels tres amics ha dedicat més hores a la preparació d'activitats?

[1 punt]

Puntuació de l'apartat 4.2	
----------------------------	--

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a algun exercici.]

Comprovació i 2a correcció:

3a correcció:

Etiqueta de l'estudiant

--



IEC
Institut d'Estudis
Catalans