SÈRIE 4.

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar fraccions de 0,25 punts en els diferents apartats i després arrodonir la suma total.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.

QÜESTIONS

1. Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, on a i b són nombres reals, trobeu els valors de a i b que fan que les dues matrius commutin, és a dir, que fan que es compleixi $A\cdot B=B\cdot A$.

SOLUCIÓ [2 punts] Tenim que $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & a+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ i $B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & a+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Per tant, A i B commuten per a tot a i b.

2. Donada la funció $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{5x^2-4}}$ es demana:

a) calculeu la integral $\int f(x)\,dx$;

b) trobeu la primitiva F de f que compleixi $F(1)=1$.

SOLUCIÓ

a) [1 punt]

$$\int\frac{x}{\sqrt{5x^2-4}}dx=\frac{1}{10}\int 10x\cdot\left(5x^2-4\right)^{-1/2}dx=\frac{1}{10}\frac{\left(5x^2-4\right)^{1/2}}{1/2}+C=\frac{1}{5}\sqrt{5x^2-4}+C\,.$$

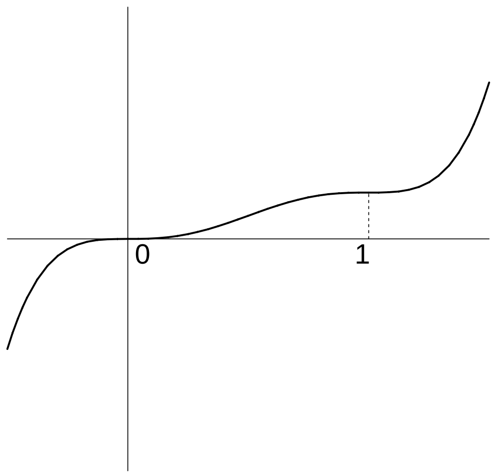
b) [1 punt] Per trobar la primitiva que ens demanen, substituïm a

$$F(x)=\frac{1}{5}\sqrt{5x^2-4}+C\,;\ 1=F(1)=\frac{1}{5}+C\quad\Leftrightarrow\quad C=\frac{4}{5}\,.$$

La primitiva demanada és $F(x)=\frac{1}{5}\sqrt{5x^2-4}+\frac{4}{5}$.

3. Trobeu els màxims i mínims relatius de la funció $f(x)=6x^5-15x^4+10x^3$.

SOLUCIÓ [2 punts]



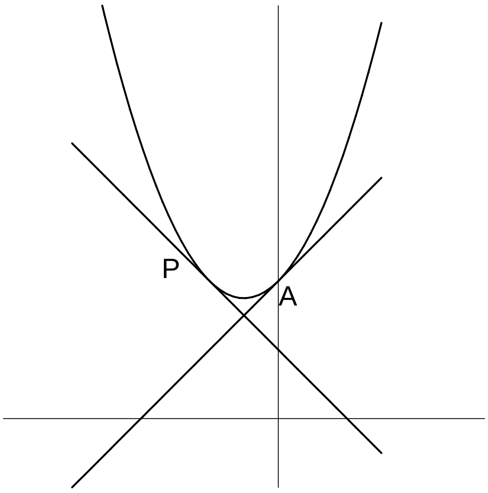
Resolem $f'(x)=0$:

$$30x^4-60x^3+30x^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad 30x^2\left(x^2-2x+1\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 30x^2\left(x-1\right)^2=0.$$

Les arrels són $x=0; x=1$, cada una doble. Per classificar màxims i mínims, podem fer servir els signes de f' al voltant de cada un dels punts candidats a màxim o mínim. En aquest cas, com que $f'(x)=30x^2\left(x-1\right)^2\geq 0$ per a tot x, la funció és sempre creixent i, per tant, no hi ha ni màxims ni mínims. El criteri de la derivada segona també es pot fer servir: $f''(x)=120x^3-180x^2+60x=60x(2x^2-3x+1)$. Tenim que $f''(0)=0$ i $f''(1)=0$. Per tant, hem de calcular la derivada tercera, $f'''(x)=360x^2-360x+60=60\left(6x^2-6x+1\right)$. Tenim $f'''(0)\neq 0$ i $f'''(1)\neq 0$, en conseqüència, tant a $x=0$ com a $x=1$ no hi ha màxims i mínims sinó que hi ha punts d'inflexió.

4. Sigui la paràbola $y = 2x^2 + x + 1$ i sigui A el punt de la paràbola d'abscissa 0. Es demana:
a) equació de la recta tangent a la paràbola en el punt A;
b) en quin punt de la paràbola la recta tangent és perpendicular a la recta que heu trobat en l'apartat anterior?

SOLUCIÓ



a) **[1 punt]** El punt A té coordenades $(0,1)$. El pendent de la recta tangent serà $y'(0) = 1$. La recta tangent és $y - 1 = x$.

b) **[1 punt]** La recta tangent en un punt qualsevol $(a, 2a^2 + a + 1)$ té pendent $y'(a) = 4a + 1$. Per tal que aquesta recta sigui perpendicular a la de l'apartat a) que té pendent 1, s'ha de complir que $1 \cdot (4a + 1) = -1 \Leftrightarrow \quad a = -\frac{1}{2}$. El punt demanant, P, té coordenades $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

PROBLEMES

5. De tres nombres, x, y i z, sabem el següent: que el primer més el segon sumen 0; que el primer més el tercer sumen 1; que la suma de tots tres val 0 i, per últim, ens diuen que el primer multiplicat per un nombre k més el doble de la suma del segon i del tercer dóna 1. Es demana:
a) què podem dir del valor de k?
b) quan valen els tres nombres?

SOLUCIÓ

a) [2 punts] Els nombres han de ser solució del sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ x+z & = & 1 \\ x+y+z & = & 0 \\ kx+2(y+z) & = & 1 \end{array}\right.$$

Podem optar per dos maneres de resoldre el problema. Una és resoldre el sistema format pels tres primeres equacions: $x=1;\ y=-1;\ z=0$. Ara, substituint a la quarta equació, tenim que $k=3$.
També podem discutir el sistema segons els valors de k. Si triangulem per Gauss la matriu ampliada del sistema, tindrem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ k & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-k & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k & 3-k \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k & 3-k \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-k \end{array}\right).$$

Es veu clar que, per tal que el sistema sigui compatible, $k=3$.

b) [2punts] Per $k=3$, el sistema es pot resoldre a partir de la matriu triangulada de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ -y+z & = & 1 \\ z & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & -1 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

6. Una piràmide de base quadrada té el vèrtex en el pla d'equació $z = 3$. Tres dels vèrtexs de la base són els punts del pla OXY : $A = (1,0,0)$, $B = (1,1,0)$, $C = (0,1,0)$. Es demana:

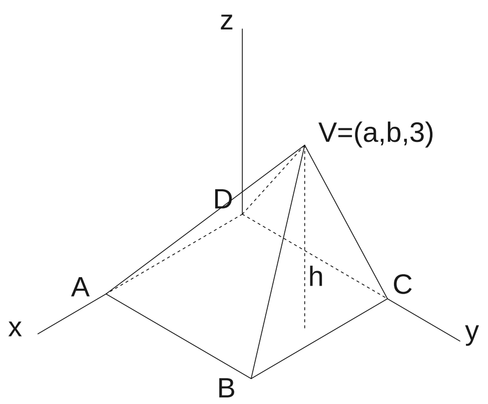
a) feu un gràfic dels elements del problema. Quines són les coordenades del quart vèrtex de la base, D ?

b) quin és el volum de la piràmide? [$\text{Volum} = \dfrac{\text{àrea base} \times \text{altura}}{3}$]

c) si el vèrtex de la piràmide és el punt $V = (a,b,3)$,quina és l'equació de la recta que conté l'altura sobre la base?

SOLUCIÓ

a) **[1 punt]**



El vèrtex $D = (0,0,0)$.

b) **[1 punt]** El volum de la piràmide serà $\text{Vol} = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$ on S és l'àrea de la base i h l'altura sobre aquesta base. En el nostre cas, la base és un quadrat de costat 1, per tant, $S = 1$ i el vèrtex de la piràmide, V , està sobre el pla $z = 3$ que és paral·lel al pla de la base, $z = 0$. La distància del vèrtex al pla de la base és doncs (independentment del lloc on es trobi el vèrtex) $h = 3$. Tenim doncs que

$$\text{Vol} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 3 = 1 \text{ unitat de volum.}$$

c) **[2 punts]** Del vèrtex de la piràmide, V , només sabem que està sobre el pla $z = 3$. Per tant el vèrtex és $V = (a,b,3)$ i a i b són valors que no podem precisar. L'equació demanada serà la d'una recta que passa pel punt $(a,b,3)$ i és perpendicular al pla $z = 0$, o sigui que té per vector director $(0,0,1)$. La recta demanada té per equació contínua $\frac{x-a}{0} = \frac{y-b}{0} = \frac{z-3}{1}$. L'equació general és:

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}.$$

Puntueu 1 punt si l'alumne pren un punt concret com a vèrtex.

SÈRIE 1

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar fraccions de 0,25 punts en els diferents apartats i després arrodonir la suma total.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.

QÜESTIONS

1. Considereu el sistema següent en funció del paràmetre real a:

$$\begin{cases} x - ay = 1 \\ ax + y = 3. \end{cases}$$

a) Discutiu-lo en funció del paràmetre a.
b) Resoleu els casos compatibles.

SOLUCIÓ. [2 punts] Per Gauss, $\begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 0 & 1+a^2 & 3-a \end{pmatrix}$. Per a qualsevol valor de a, el rang de la matriu del sistema és 2 i coincideix amb el de la matriu ampliada i el nombre d'incògnites. El sistema és, doncs, compatible determinat per a tot valor de a.

(O bé, el determinant del sistema és $\begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2$ que és sempre diferent de 0. El sistema és, doncs, compatible determinat per a tot valor de a.)

La solució és:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1+3a}{1+a^2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3-a}{1+a^2}.$$

Puntueu amb 1 punt per la discussió correcta i 1 punt per la solució correcta

2. La següent matriu expressa els preus unitaris, en euros, de quatre articles A, B, C i D procedents de les fàbriques f1, f2 i f3:

$$P = \begin{pmatrix} 34 & 40 & 36 \\ 11 & 8 & 12 \\ 23 & 27 & 32 \\ 25 & 21 & 30 \end{pmatrix}$$

Si una comanda ve representada per un vector fila $C = \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix}$, què representa cadascun dels elements del resultat del producte $C \cdot P$? Si volem comprar 25 unitats de A, 30 de B, 60 de C i 75 de D, quina de les fàbriques ens ofereix el millor preu?

SOLUCIÓ [2 punts] Com que la matriu té 4 files i 3 columnes, és clar que cada columna representa la fàbrica i cada fila el producte. Així, una unitat del producte B de la fàbrica 3 té un preu de 12 € (fila 2, columna 3). El producte $C \cdot P$,

$$C \cdot P = \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 34 & 40 & 36 \\ 11 & 8 & 12 \\ 23 & 27 & 32 \\ 25 & 21 & 30 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 34x + 11y + 23z + 25t & 40x + 88 + 27z + 21t & 36x + 12y + 32z + 30t \end{pmatrix}$$

és una matriu fila 1x3 i cada element representa el COST de la comanda en cada fàbrica. Pel cas concret $C = \begin{pmatrix} 25 & 30 & 60 & 75 \end{pmatrix}$, el cost de la comanda en cada fàbrica és $\begin{pmatrix} 4435 & 4435 & 5430 \end{pmatrix}$. En conseqüència, tant la fàbrica f1 com la f2 ens ofereixen el millor preu, 4435€.

Puntueu amb 1 punt per donar la interpretació correcta a cada element del producte i 1 punt per la solució correcta.

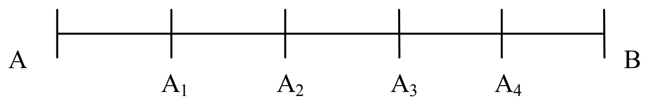
3. Trobeu la distància entre la recta $r: \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+2}{3}$ i el pla $\pi: 3x + 4y + 7 = 0$.

SOLUCIÓ [2 punts] Trobem primer la posició relativa de la recta i el pla. Com que el vector normal del pla $\vec{n} = (3,4,0)$ i el vector director de la recta, $\vec{v} = (4,-3,3)$ tenen producte escalar, $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$, resulta que la recta és o bé paral·lela al pla, o està continguda en ell. Com que el punt de la recta $(3,1,-2)$ no pertany a π, $(3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 7 \neq 0)$, r i π són paral·lels. La distància entre la recta i el pla serà la de qualsevol punt de la recta al pla. La distància de (3,1,-2) (per exemple) al pla és:

$$\frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 7}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} = 4 \text{ unitats.}$$

Puntueu amb 1 punt per trobar la posició relativa i 1 punt per la distància correcta.

4. Un segment d'origen el punt $A=(-1,4,-2)$ i extrem B està dividit en cinc parts iguals mitjançant els punts de divisió A_1, A_2, A_3 i A_4 (vegeu la figura). Si sabem que $A_2=(1,0,2)$, quines són les coordenades de B ?



SOLUCIÓ [2 punts] . És clar que $\overrightarrow{AB}=5\cdot\overrightarrow{AA_1}$ i que

$$\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AA_2}=\frac{1}{2}\cdot(1+1,0-4,2+2)=(1,-2,2).$$

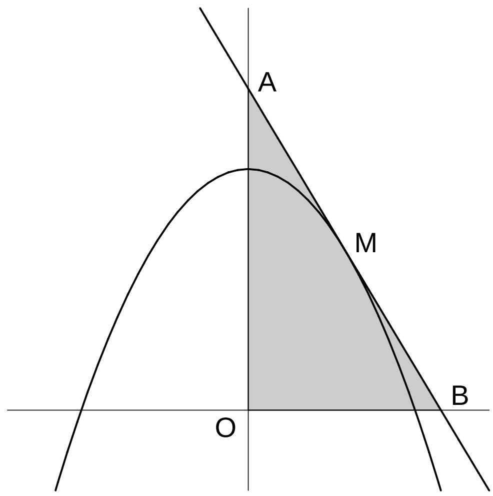
Per tant, $\overrightarrow{AB}=5\cdot(1,-2,2)=(5,-10,10)$.

Les coordenades de B són $(-1+5,4-10,-2+10)=(4,-6,8)$.

PROBLEMES

5. La recta tangent a la paràbola $y = 3 - x^2$ en un punt M situat dins del primer quadrant ($x > 0, y > 0$), talla l'eix OX en el punt B i l'eix OY en el punt A. Es demana:
   a) feu un gràfic dels elements del problema;
   b) trobeu les coordenades del punt M que fan que el triangle OAB tingui àrea mínima.

SOLUCIÓ
a) [1 punt]



b) **[3 punts]** Les coordenades del punt M seran $M = \left(a, 3 - a^2\right)$, amb $a > 0$. Com que la derivada de la funció en el punt d'abscissa a és $y'(a) = -2a$, l'equació de la recta tangent per el punt M serà
$y - \left(3 - a^2\right) = -2a\left(x - a\right)$, que arreglada queda com $2ax + y - 3 - a^2 = 0$. Els punts d'intersecció amb els eixos seran: $B = \left(\dfrac{3 + a^2}{2a}, 0\right)$ i $A = \left(0, 3 + a^2\right)$. El triangle OAB és rectangle i la seva àrea és:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left(3 + a^2\right) \cdot \frac{3 + a^2}{2a} = \frac{\left(3 + a^2\right)^2}{4a}$$

S és funció de a. Per trobar-ne el mínim, calculem $S'(a) = \dfrac{\left(3 + a^2\right)\left(3a^2 - 3\right)}{4a^2}$. Els zeros de la derivada són $a = \pm 1$. Descartem el valor negatiu i examinem el signe de S' per valors lleugerament inferiors i lleugerament superiors a 1:

$S'(1-\varepsilon)<0$ i $S'(1+\varepsilon)>0$, per tant estem davant d'un mínim. Com que $S''=\dfrac{3(3+a^2)}{2a^3}$, també es pot comprovar que $S''(1)>0$. Les coordenades del punt M que ens demanen, són $M=(1,2)$.

Puntueu 1 punt per trobar la recta tangent correctament. 1 punt més per plantejar correctament la funció àrea i trobar el valor de a i un últim punt per classificar correctament el mínim i donar la solució demanada. Penalitzeu amb 0,5 el fet d'oblidar calcular les coordenades de M.

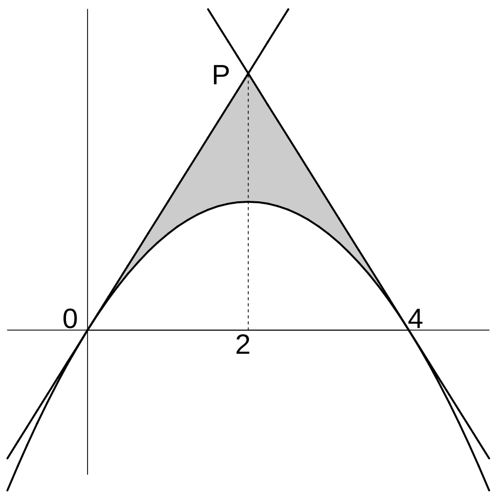
6. Considereu la funció $f(x)=4x-x^2$. Es demana:
   a) calculeu l'equació de les rectes tangents a la gràfica de f en els punts d'abscisses $x=0$ i $x=4$;
   b) feu un gràfic dels elements del problema;
   c) calculeu l'àrea compresa entre la gràfica de f i les rectes tangents que heu trobat a l'apartat a).

SOLUCIÓ

a) **[1 punt]** La derivada de f és $f'(x)=4-2x$. Els pendents de les rectes tangents demanades són $f'(0)=4$ i $f'(4)=-4$ La recta tangent en el punt $(0,0)$ té per equació $y=4x$ i la recta tangent en el punt $(4,0)$ és $y=-4x+16$.

Puntueu 1 punt per cada tangent trobada. Penalitzeu els errors de càlcul.

b) [1 punt]



c) **[2 punts]** La intersecció de les dues tangents és el punt $P = (2,8)$ (vegeu la gràfica). L'àrea demanda la calcularem en dos trossos: l'àrea per sota de $y = 4x$ i per sobre de $f(x)$ entre 0 i 2:

$$\int_0^2 (4x - 4x + x^2)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

I l'àrea per sota de $y = -4x + 16$ i per sobre de $f(x)$ entre 2 i 4:

$$\int_2^4 (-4x + 16 - 4x + x^2)dx = \left[16x - 4x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_2^4 = \frac{8}{3}.$$

En total, l'àrea demanda és de $\frac{16}{3}$ unitats d'àrea.

Puntueu 1 punt pel plantejament correcte (encara que hi hagi errors en el punt d'intersecció de les tangents) i 1 punt per l'àrea correcta. Penalitzeu errors de càlcul. Si algú trobar una de les integrals i multiplica el resultat per 2 fent servir la simetria, òbviament té correcte el càlcul de l'àrea.