



## SÈRIE 1

1. a) Com que  $f(0) = \frac{0}{-1} = 0$ , el tall amb l'eix d'ordenades és al punt  $(0,0)$ . Per als talls amb l'eix d'abscisses, hem de resoldre l'equació  $\frac{x^2-2x}{x-1} = 0$ , que té com a solucions  $x = 0$  i  $x = 2$ ; per tant, els talls amb l'eix d'abscisses són  $(0,0)$  i  $(2,0)$ .

Aquesta funció té una asímptota vertical a  $x = 1$ , ja que aquest punt és fora del domini i  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x}{x-1} = \frac{-1}{0} = \pm\infty$  (més precisament,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-2x}{x-1} = \frac{-1}{+0} = -\infty$  i  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-2x}{x-1} = \frac{-1}{-0} = +\infty$ ). A més a més, aquesta funció té una asímptota obliqua, ja que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2x}{x^2-x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Com que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2-2x}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2x-x^2+x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x-1} = -1,$$

es tracta de la recta  $y = x - 1$ .

b) La derivada d'aquesta funció és:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2-2x)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Com que  $f(0) = 0$  i  $f'(0) = 2$ , la recta tangent al punt  $(0,0)$  tindrà per equació:

$$y - 0 = 2(x - 0) \rightarrow y = 2x.$$

Anàlogament, com que  $f(2) = \frac{4-4}{1} = 0$  i  $f'(2) = \frac{4-4+2}{1} = 2$ , la recta tangent al punt  $(2,0)$  tindrà per equació:

$$y - 0 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 4.$$



**Proves d'accés a la Universitat 2025, convocatòria ordinària. Criteri específic d'avaluació**

Aquestes dues rectes són paral·leles ja que tenen el mateix pendent:  $f'(0) = f'(2) = 2$ .

c) Igualant la derivada a 1, ens queda una equació sense solució:

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{(x - 1)^2} = 1 \rightarrow x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 \rightarrow 2 = 1.$$

Per tant, no hi ha cap punt on la recta tangent tingui pendent 1.

**Criteris de correcció:** a) Compteu 0,25 p. pels punts de tall; 0,25 p. per l'asíptota vertical (encara que no distingeixin el límit per la dreta i per l'esquerra), i 0,5 p. per l'equació de l'asíptota obliqua. b) Compteu 0,25 p. pel càlcul de la derivada; 0,25 p. per cadascuna de les rectes tangents, i 0,25 p. per justificar correctament que són paral·leles. c) Compteu 0,25 p. per plantejar l'equació i 0,25 p. per veure que no té solució i respondre que la gràfica no té cap recta tangent amb pendent 1.

2. a) La matriu de coeficients i l'ampliada,  $A$  i  $A'$  respectivament, són les següents:

$$\underbrace{\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & p+3 \\ p^2 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{array} \right)}_{A'}$$

En primer lloc, calculem el determinant de  $A$ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ p^2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + p^2 - 1 = p^2 - 1.$$

Igualant-lo a zero, en resulten els valors  $p = 1$  i  $p = -1$ . Per tant, distingim els casos següents:

- Si  $p \neq 1, -1$ , el determinant de  $A$  és diferent de zero i, per tant,  $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 3$ , que és igual al nombre d'incògnites. Per tant, es tracta d'un sistema compatible determinat.
- Si  $p = 1$ , el determinant de la matriu de coeficients és zero; com que tenim el menor  $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ , aleshores  $\text{rang}(A) = 2$ . Però la matriu ampliada té  $\text{rang}(A') = 3$  gràcies, per exemple, al menor:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 - 4 - 3 = -2 \neq 0.$$

**Proves d'accés a la Universitat 2025, convocatòria ordinària. Criteri específic d'avaluació**

Per tant, el sistema és incompatible.

- Si  $p = -1$ , tenim el sistema:

$$\begin{cases} y - z = 2 \\ x - z = 5 \\ x - y = 3. \end{cases}$$

Eliminant la segona equació (per ser suma de la primera i la tercera), i com que la matriu  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  té rang 2, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

**b)** Per al cas  $p = -1$ , es tracta del sistema:

$$\begin{cases} y - z = 2 \\ x - y = 3, \end{cases}$$

que és compatible indeterminat. Fent  $y = \lambda$ , s'obté  $x = \lambda + 3$  i  $z = \lambda - 2$ . Per tant la solució del sistema és, en aquest cas,  $(x, y, z) = (\lambda + 3, \lambda, \lambda - 2)$ , amb  $\lambda$  real.

**c)** Per al cas  $p = -1$ , el sistema té les infinites solucions obtingudes a l'apartat anterior. Imposant, a més, que  $xy = 10$ , resulta  $(\lambda + 3)\lambda = 10$ ; és a dir,  $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$ ; d'aquí obtenim:

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-10)}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = -5, 2.$$

Per tant, el sistema té exactament dues solucions complint  $xy = 10$ , que són les corresponents a  $\lambda = -5$  i  $\lambda = 2$ . Es tracta de  $(x, y, z) = (-2, -5, -7)$  i  $(x, y, z) = (5, 2, 0)$ , respectivament.

**Criteris de correcció:** **a)** Compteu 0,25 punts pel càlcul del determinant; 0,25 p. per determinar els valors crítics de  $p$ , i 0,25 p. per la discussió de cadascun dels tres casos. **b)** Compteu 0,5 punts pel càlcul correcte del conjunt de solucions (evidentment, poden triar qualsevol de les variables com a lliure). **c)** Compteu 0,25 p. pel plantejament de l'equació quadràtica; 0,25 p. per la seva resolució, i 0,25 p. pel càlcul dels dos punts resultants.

**Comentaris:** hi ha altres maneres de discutir i resoldre el sistema d'equacions. Compteu-les bé en la mesura que ho facin correctament i de manera justificada.



3. a) Considerem els successos aleatoris següents:

$$\begin{aligned}A &= \text{"la peça escollida és d'acer"}, \\F &= \text{"la peça escollida és de ferro"}, \\D &= \text{"la peça escollida és defectuosa"}.\end{aligned}$$

De les dades de l'enunciat tenim  $P(F) = 0,6$ ,  $P(A) = 1 - 0,6 = 0,4$ ,  $P(D|F) = 0,05$ ,  $P(D|A) = 0,03$ . Per la llei de probabilitats totals, la probabilitat que una peça sigui defectuosa és:

$$P(D) = P(D|F)P(F) + P(D|A)P(A) = 0,05 \cdot 0,6 + 0,03 \cdot 0,4 = 0,042.$$

b) Anomenem  $X$  el nombre de peces defectuoses en un paquet. De l'enunciat deduïm que  $X$  segueix una llei binomial amb  $n = 5$  i probabilitat  $p$ . Per tant, la probabilitat que en un paquet hi hagi exactament quatre peces defectuoses és:

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} p^4 (1 - p) = \frac{5!}{4!} p^4 (1 - p) = 5 p^4 (1 - p) = 5(p^4 - p^5).$$

També podem argumentar directament sense fer servir la llei binomial. Com que hi ha quatre peces defectuoses, n'hi haurà exactament una que no ho és. La probabilitat que una en concret (per exemple, la primera) sigui bona i les altres quatre defectuoses és  $(1 - p)p^4$ . Com que hi ha cinc possibilitats per escollir quina és la peça bona,  $P(X = 4) = 5(1 - p)p^4 = 5(p^4 - p^5)$ .

c) Busquem els extrems relatius de la funció  $f(p) = 5(p^4 - p^5)$ .

$$f'(p) = 5(4p^3 - 5p^4) = 0 \quad \rightarrow \quad p = 0, \quad p = \frac{4}{5}.$$

Observem que  $f(0) = 0$  i que  $f\left(\frac{4}{5}\right) > 0$ . Mirem el signe de la segona derivada:

$$f''(p) = 5(12p^2 - 20p^3) \quad \rightarrow \quad f''\left(\frac{4}{5}\right) = 5\left(12\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 20\left(\frac{4}{5}\right)^3\right) < 0.$$

i deduïm que a  $p = \frac{4}{5}$  la funció  $f(p)$  assoleix un màxim local. Com que per  $p \in (0, \frac{4}{5})$  la funció creix i per  $p > \frac{4}{5}$  la funció decreix, es tracta d'un màxim absolut quan  $p$  és no negativa. I el valor màxim serà  $f\left(\frac{4}{5}\right) = 5\left(\left(\frac{4}{5}\right)^4 - \left(\frac{4}{5}\right)^5\right) = 0,41$ .



**Criteris de correcció:** **a)** Compteu 0,25 punts per plantejar la llei de la probabilitat total (o fer l'arbre de decisió o similar); 0,25 p. per identificar correctament les dades del problema, i 0,25 p. pel càlcul concret. **b)** Compteu 0,5 punts pel plantejament i 0,25 p. pel càlcul. **c)** Compteu 0,25 punts pel càlcul de la derivada i els punts crítics, 0,5 p. per argumentar que el màxim absolut en  $p > 0$  es troba a  $p = 4/5$ , i 0,25 p. per trobar el valor d'aquest màxim.

**4. OPCIÓ A.** La vela ocupa la regió compresa entre les corbes  $y = 0$ ,  $x = 0$ , i  $y = -x^2 + 25$ . Per calcular el cost total, caldrà calcular separatament l'àrea de la regió superior i l'àrea de la regió inferior i multiplicar-les cadascuna pel preu del material respectiu (niló o polièster).

Troblem primer els punts de tall entre les funcions involucrades: el punt de tall de  $y = -x^2 + 25$  amb la part positiva de l'eix d'abscisses és:

$$y = 0 \rightarrow -x^2 + 25 = 0 \rightarrow x = 5.$$

L'abscissa positiva del punt de tall entre les corbes  $y = -x^2 + 25$  i  $y = 9$  és

$$-x^2 + 25 = 9 \rightarrow -x^2 = -16 \rightarrow x = 4.$$

L'àrea total sota la corba  $y = -x^2 + 25$  entre els extrems  $x = 0$  i  $x = 5$  és

$$A_{total} = \int_0^5 (-x^2 + 25) dx = \left[ \frac{-x^3}{3} + 25x \right]_0^5 = \frac{-125}{3} + 125 - 0 = \frac{250}{3} u^2.$$

L'àrea de la regió inferior és:

$$\begin{aligned} A_{inf} &= \int_0^4 9 dx + \int_4^5 (-x^2 + 25) dx = 9 \cdot 4 + \left[ \frac{-x^3}{3} + 25x \right]_4^5 = \\ &= 36 + \left( -\frac{125}{3} + 125 \right) - \left( -\frac{64}{3} + 100 \right) = 36 + \frac{14}{3} = \frac{122}{3} u^2. \end{aligned}$$

Finalment, l'àrea de la regió superior és la diferència:

$$A_{sup} = A_{total} - A_{inf} = \frac{250}{3} - \frac{122}{3} = \frac{128}{3} u^2.$$

Així doncs, el cost total de la vela serà:

$$\frac{128}{3} u^2 \cdot 50 \text{ €/}u^2 + \frac{122}{3} u^2 \cdot 70 \text{ €/}u^2 = \frac{6.400 + 8.540}{3} \text{ €} = 4.980 \text{ €}.$$



**Proves d'accés a la Universitat 2025, convocatòria ordinària. Criteri específic d'avaluació**

**Criteris de correcció:** Compteu 0,25 punts pels punts de tall; 0,5 p. pel plantejament de l'àrea de la regió inferior, i 0,5 p. pel càlcul; 0,5 p. pel plantejament de l'àrea de la regió superior, i 0,5 p. pel càlcul, i, finalment, 0,25 p. pel càlcul del cost final.

**Comentaris:** hi ha altres maneres de plantejar el càlcul de les dues àrees. Compteu-les bé si ho fan correctament i de manera justificada.

**4. OPCIÓ B. a)** El pla  $\pi'$  que busquem té vectors directors  $(1,1,0)$  i  $\overrightarrow{PQ} = (3, -3, 6) - (1, -1, 2) = (2, -2, 4) \sim (1, -1, 2)$ . Fent-lo passar pel punt  $P$ , serà el pla d'equació:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 2 - z + 2 - z + 2 - 2y - 2 = 0$$

és a dir,  $2x - 2y - 2z = 0$ ; o, simplificant,  $x - y - z = 0$ .

**b)** La recta que ens demanen és la intersecció del pla  $\pi'$  amb el pla perpendicular a  $\overrightarrow{PQ} \sim (1, -1, 2)$  que passa pel punt mig:

$$M = \frac{P + Q}{2} = \frac{1}{2}(4, -4, 8) = (2, -2, 4).$$

Aquest pla té equació  $x - y + 2z = D$  amb  $D = 2 - (-2) + 2 \cdot 4 = 12$ ; és a dir,  $x - y + 2z = 12$ . Per tant, la recta demanada és:

$$\left. \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x - y + 2z = 12 \end{array} \right\}$$

Com que restant obtenim  $z = 4$ , es tracta de la recta:

$$(x, y, z) = (k + 4, k, 4) = (4, 0, 4) + k(1, 1, 0).$$

**Criteris de correcció:** **a)** Compteu 0,5 punts per plantejar correctament el problema i 0,5 pel càlcul de l'equació. **b)** Compteu 0,75 p. per calcular l'equació del pla perpendicular a  $\overrightarrow{PQ}$  passant pel punt mig, i 0,75 p. per l'equació paramètrica de la recta intersecció amb  $\pi'$ .



## SÈRIE 4

1. a) El domini d'aquesta funció és

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 + x^3 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \geq -1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\} \\ &= [-1, +\infty). \end{aligned}$$

Com que  $f(0) = \sqrt{1 + 0^3} = 1$ , el tall d'aquesta funció amb l'eix d'ordenades és al punt  $(0,1)$ . Els talls amb l'eix d'abscisses corresponen a les solucions de l'equació  $f(x) = 0$ , que són

$$\sqrt{1 + x^3} = 0 \rightarrow 1 + x^3 = 0 \rightarrow x^3 = -1 \rightarrow x = -1.$$

Per tant, es tracta només del punt  $(-1, 0)$ .

b) La derivada de  $f(x)$  és  $f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$ , i l'equació de l'enunciat és  $\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}} = 0$ . Aïllant, ens queda  $3x^2 = 0$  i, per tant  $x = 0$ . L'únic candidat a extrem dins l'interior del domini és, doncs, el punt  $x = 0$ . Ara bé, la funció derivada és positiva,  $f'(x) \geq 0$ , per que es tracta d'una fracció entre nombres sempre positius. Això vol dir que  $f$  és una funció creixent en tot el seu domini  $[-1, \infty)$ . Per tant, aquesta funció no té cap màxim ni mínim locals.

c) El punt de tangència  $(a, 3)$  està sobre la gràfica de la funció i, per tant, compleix

$$f(a) = \sqrt{1 + a^3} = 3 \rightarrow 1 + a^3 = 9 \rightarrow a^3 = 8 \rightarrow a = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Aquesta recta tangent tindrà pendent  $m = f'(2) = \frac{3 \cdot 2^2}{2\sqrt{1+2^3}} = \frac{12}{6} = 2$ . Per tant, es tracta de

$$y - 3 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 1.$$

**Criteris de correcció:** (a) Compteu 0,25 per la determinació del domini de la funció, i 0,25 pel càlcul dels punts de tall. (b) Compteu 0,25 pel càlcul de la derivada, 0,25 per als punts crítics, 0,25 per determinar que no hi ha màxims ni mínims locals, i 0,25 per reconèixer que es tracta d'una funció creixent. (c) Compteu 0,5 punts per determinar l'abscissa del punt de tangència i 0,5 pel càlcul de la recta tangent.



2. a) Comencem calculant el determinant de la matriu de coeficients del sistema:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ -2 & -6 & 2 \\ a & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 6a - 6a - (-6a^2 + 6 - 6) = 6a^2 - 6 \\ = 6(a^2 - 1).$$

Clarament s'anul·la només quan  $a = \pm 1$ . Per tant si  $a \neq 1$  i  $a \neq -1$  el rang de la matriu de coeficients és 3, el rang de la matriu ampliada també i, com que tenim tres incògnites, és un sistema compatible determinat.

Per al cas  $a = 1$  tenim el sistema d'equacions:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Fem Gauss: a la fila 2 li sumem dues vegades la fila 1, i a la fila 3 li restem la fila 1:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Clarament, veient la tercera equació, es tracta d'un sistema incompatible.

Finalment, per al cas  $a = -1$  tenim el sistema

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Tornem a fem Gauss: a la fila 2 li sumem dues vegades la fila 1, i a la fila 3 li sumem la fila 1:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

Ara està clar que els rangs de les matrius de coeficients i ampliada són ambdós 2 i, com que hi ha tres incògnites, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

b) Per al cas  $a \neq 1$  i  $a \neq -1$  el sistema ens ha donat compatible determinat, la qual cosa significa que els tres plans  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  i  $\pi_3$  es tallen en un sol punt comú.





**Proves d'accés a la Universitat 2025, convocatòria ordinària. Criteri específic d'avaluació**

Per al cas  $a = 1$  el sistema és incompatible i, per tant, els tres plans a la vegada no s'intersequen. Clarament,  $\pi_1$  i  $\pi_3$  són plans paral·lels (per que els vectors  $(1, 3, 1)$  i  $(1, 3, 1)$  són proporcionals) i  $\pi_2$  és un pla secant als dos anteriors.

Finalment, per al cas  $a = -1$ , tenim que  $\pi_1 = \pi_2$  (les equacions són proporcionals) i  $\pi_3$  és un pla secant a l'anterior; per tant, la intersecció dels tres és una recta.

**c)** Pel que hem vist a l'apartat anterior l'únic cas en què la intersecció dels tres plans és una recta és per  $a = -1$ . Resolem el sistema aprofitant els càlculs de l'apartat (a). Tenim  $y = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$  i  $x + 3\frac{2}{3} - z = 1$ , per tant,  $x = z - 1$ . Les solucions, i per tant els punts de la recta en qüestió són de la forma  $(x, y, z) = \left(z - 1, \frac{2}{3}, z\right) = \left(-1, \frac{2}{3}, 0\right) + z(1, 0, 1)$ . D'aquí veiem que  $\left(-1, \frac{2}{3}, 0\right)$  és un punt d'aquesta recta i  $(1, 0, 1)$  n'és un vector director.

**Criteris de correcció:** (a) Compteu 0,25 pel càlcul del determinant, i 0,25 per la discussió de cadascun dels tres casos. (b) Compteu 0,25 per interpretar la posició relativa en cadascun dels tres casos. (c) Compteu 0,25 per agafar el valor adequat del paràmetre, 0,25 per resoldre el sistema, i 0,25 per deduir un punt i un vector director.

**3. a)** Considerem els esdeveniments aleatoris

$$B = \text{"rebre un correu brossa"}, \\ CB = \text{"rebre un correu a la carpeta de correu brossa"}.$$

Segons les dades de l'enunciat tenim que  $P(B) = 0,25$ ,  $P(\bar{B}) = 1 - 0,25 = 0,75$ ,  $P(CB | B) = 0,95$ , i  $P(\bar{CB} | \bar{B}) = 0,9$ . Per la llei de la probabilitat total,

$$P(CB) = P(CB | B) P(B) + P(CB | \bar{B}) P(\bar{B}) = 0,95 \cdot 0,25 + (1 - 0,9) \cdot 0,75 = 0,3125.$$

**b)** Cal calcular  $P(\bar{B} | CB)$ . Per la fórmula de Bayes:

$$P(\bar{B} | CB) = \frac{P(\bar{B} \cap CB)}{P(CB)} = \frac{P(CB | \bar{B}) \cdot P(\bar{B})}{0,3125} = \frac{0,1 \cdot 0,75}{0,3125} = 0,24.$$

S'hi trobarà un 24% dels correus que no són brossa.

**c)** Calculant la funció de l'enunciat, la probabilitat de rebre almenys dos correus en menys de  $t$  minuts és

$$F(t) = \int_0^t A e^{-0,5x} dx = \left[ \frac{A}{-0,5} e^{-0,5x} \right]_0^t = \frac{A}{-0,5} (e^{-0,5t} - 1) = 2A(1 - e^{-0,5t}).$$



**Proves d'accés a la Universitat 2025, convocatòria ordinària. Criteri específic d'avaluació**

Imposant el valor de  $F(2)$  que ens donen, trobem  $2A(1 - e^{-1}) = 1 - e^{-1}$ , d'on resulta  $A = 0,5$ .

**Criteris de valoració:** (a) Compteu 0,25 per plantejar la llei de la probabilitat total, 0,25 per identificar les dades del problema, i 0,25 pel càlcul. (b) Compteu 0,25 per plantejar la fórmula de Bayes (o la fórmula de la probabilitat condicionada) i 0,5 pel càlcul. (c) Compteu 0,5 per al càlcul explícit de  $F(t)$ , 0,25 per imposar  $F(2)$ , i 0,25 pel càlcul final.

**4. OPCIÓ A.** a) Com que el volum de la part cilíndrica ha de ser de  $100 \text{ cm}^3$ , tenim que  $\pi r^2 h = 100$  i per tant  $h = \frac{100}{\pi r^2}$ . La superfície total de l'ampolla s'obté sumant la superfície de la base,  $\pi r^2$ , la superfície lateral del cilindre,  $2\pi r h$ , i la superfície de la mitja esfera superior,  $\frac{1}{2} 4\pi r^2 = 2\pi r^2$ ; per tant, és

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h + 2\pi r^2 = 3\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Si substituïm  $h$  per l'expressió que tenim en funció de  $r$ , obtenim la funció

$$S(r) = 3\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{100}{\pi r^2} = 3\pi r^2 + \frac{200}{r}.$$

b) Busquem ara el mínim d'aquesta funció calculant la seva derivada:

$$S'(r) = 6\pi r - \frac{200}{r^2}.$$

Igualant-la a zero,  $S'(r) = 0$ , obtenim

$$6\pi r - \frac{200}{r^2} = 0,$$

$$6\pi r = \frac{200}{r^2},$$

$$r^3 = \frac{100}{3\pi},$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{100}{3\pi}} \simeq 2,2 \text{ cm}.$$

**Proves d'accés a la Universitat 2025, convocatòria ordinària. Criteri específic d'avaluació**

Per verificar que es tracta d'un mínim podem utilitzar la segona derivada

$$S''(r) = 6\pi + \frac{400}{r^3},$$

que és clarament positiva per a qualsevol  $r$  positiu. Per tant, per a  $r = 2,2 \text{ cm}$  l'ampolla té superfície total mínima. En aquest cas tenim  $h = \frac{100}{\pi \cdot 2,2^2} = 6,6 \text{ cm}$  i la superfície total mínima és de  $S(2,2) = 3\pi \cdot 2,2^2 + 2\pi \cdot 2,2 \cdot 6,6 \simeq 136,8 \text{ cm}^2$ .

**Criteris de correcció:** (a) Compteu 0,5 per la lligadura donada pel volum i 0,5 pel càlcul correcte de la fórmula de l'àrea total. (b) Compteu 0,5 punts pel càlcul de la derivada, 0,25 per trobar el valor de  $r$ , 0,25 per comprovar que es tracta d'un mínim, i 0,5 per donar la resposta completa (dimensions i àrea total).

**4. OPCIÓ B. a) Tenim**

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2 + a^2 & 4a^2 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ a + 4 & 4a^2 \end{pmatrix}.$$

Per tant, les matrius  $A$  i  $B$  commuten si i només si  $2 + a^2 = a + 4$ , és a dir, si i només si  $a^2 - a - 2 = 0$ . Les solucions d'aquesta equació són  $a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1$ . Per  $a = 2$  la matriu  $A$  coincideix amb  $B$ , i per  $a = -1$  obtenim  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**b) La matriu  $A$  és invertible si i només si  $\det(A) \neq 0$ . Tenim**

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^3.$$

Per tant la matriu  $A$  és invertible si i només si  $a \neq 0$ .



c) Que  $A = A^{-1}$  és el mateix que dir  $AA = Id$ . Imposant aquesta igualtat,

$$AA = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a^2 + a & a^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

obtenim les equacions  $a^2 = a^4 = 1$  i  $a^2 + a = 0$ . Les dues primeres equacions es compleixen per  $a = 1$  i per  $a = -1$ , i la tercera per  $a = -1$  i per  $a = 0$ . Per tant,  $A^{-1} = A$  si i només si  $a = -1$ . Alternativament es pot calcular la matriu inversa,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{Adj } A)^t = \frac{1}{a^3} \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ -1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a^3} & \frac{1}{a^2} \end{pmatrix};$$

i, imposant que coincideixi amb la matriu  $A$ , obtenim les equacions  $a^2 = 1$ ,  $a^3 = -1$ , i  $a^4 = 1$ , que tenen per solució  $a = -1$ .

**Criteris de correcció:** (a) Compteu 0,25 pel càlcul de  $AB$ , 0,25 pel càlcul de  $BA$ , i 0,25 per resoldre l'equació i donar la resposta. (b) Compteu 0,25 pel càlcul del determinant i 0,5 per la resposta justificada. (c) Compteu 0,5 pel càlcul de  $AA$  (o de  $A^{-1}$ ), 0,25 per plantejar les equacions a resoldre, i 0,25 per la resposta. Si donen com a respostes vàlides totes les solucions parcials  $a = 1, -1, 0$ , compteu només els 0,5 punts del càlcul de  $A^2$  (ó  $A^{-1}$ ).